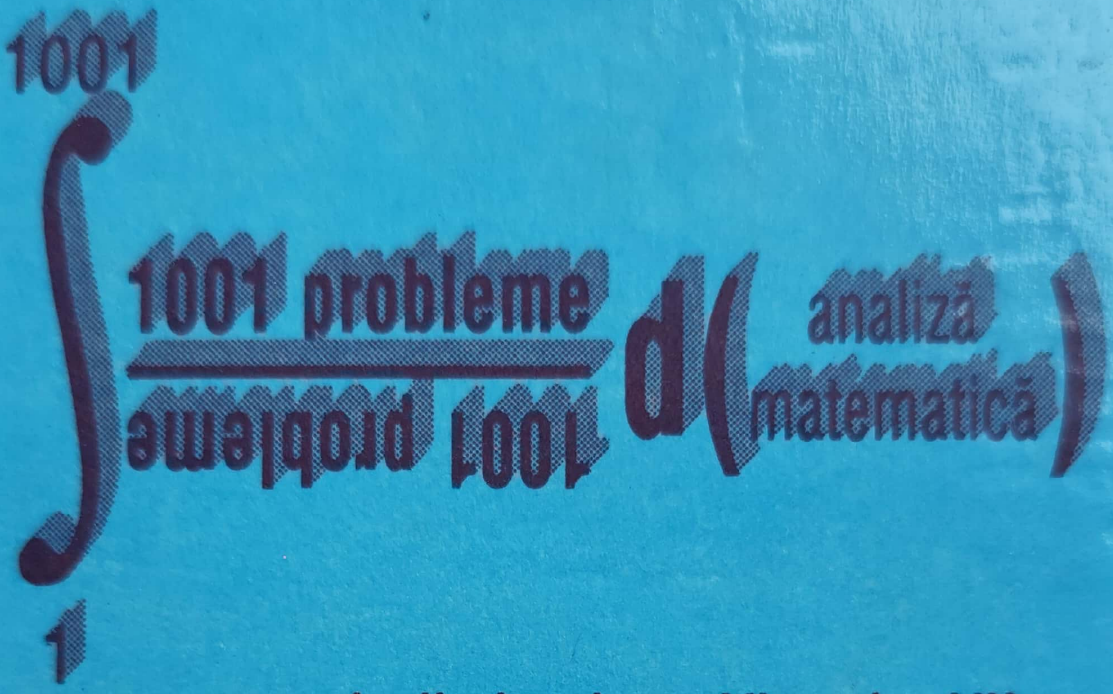
VICTOR GEANGALĂU



pentru elevii claselor a XI-a şi a XII-a
în vederea pregătirii bacalaureatului
şi admiterii la facultate

Scanned with OKEN Scanner

VICTOR GEANGALĂU

1001 PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Editura JUNIMEA IAŞI
Editura UNIVERSITAS CHIŞINĂU
1994

Scanned with OKEN Scanner

CZU 4517(075.32)
G30

G $\frac{1602070100 - 055}{M751(10) - 93}$

ISBN 973-37-0180-7

ISBN 5-362-01072-7

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

	Probleme	Teorie
CAPITOLUL I. NOŢIUNI INTRODUCTIVE		
I.1. Elemente de logică matematică	1	395
I.2. Mulţimi	5	397
I.3. Inegalităţi	12	400
CAPITOLUL II. FUNCŢII REALE		
II.1. Definiţia funcţiei. Funcţii egale şi funcţii neegale. Operaţii cu funcţii reale de variabilă reală	21	403
II.2. Ecuaţii funcţionale	34	405
II.3. Funcţii injective, surjective, bijective	39	406
II.4. Compunerea şi inversarea funcţiilor	46	406
II.5. Funcţii pare şi funcţii impare	55	407
II.6. Periodicitatea funcţiilor	59	407
II.7. Funcţii monotone	64	409
II.8. Funcţii mărginite	67	411
II.9. Funcţii convexe	71	412
CAPITOLUL III. ŞIRURI DE NUMERE REALE. LIMITE DE ŞIRURI		
III.1. Noţiunea de şir	74	413
III.2. Şiruri monotone	77	413
III.3. Şiruri mărginite	82	414
III.4. Şiruri convergente. Operaţii cu şiruri convergente. Limite de şiruri	87	414
III.5. Serii numerice	116	419
CAPITOLUL IV. LIMITE DE FUNCŢII. CONTINUITATE		
IV.1. Noţiunea de limită. Limite laterale. Operaţii cu limite de funcţii. Criterii	123	423
IV.2. Asimptomele funcţiilor reale	135	425
IV.3. Limite de funcţii	141	426
IV.4. Definiţia continuităţii. Continuitatea la stînga şi la dreapta în x_0. Operaţii cu funcţii continue	184	443
IV.5. Proprietăţi ale funcţiilor continue. Proprietatea lui Darboux	196	445
IV.6. Funcţii uniform continue	210	446
IV.7. Imaginea geometrică a unor limite	215	446

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V. DERIVATE. DERIVABILITATE

V.1. Definiţia derivatei. Derivate laterale. Derivabilitate	223	448
V.2. Aplicaţii cu derivate	232	453
V.3. Puncte de extrem. Teorema lui Fermat. Maxime sau minime	244	456
V.4. Teorema lui Rolle. Separarea rădăcinilor cu ajutorul şirului lui Rolle	250	457
V.5. Teorema lui Lagrange	257	459
V.6. Teorema lui Cauchy	262	460
V.7. Formula lui Taylor şi formula lui Mac-Lauren	265	461
V.8. Regulile lui l'Hôpital şi aplicarea lor la calculul limitelor	269	462
V.9. Calculul valorilor aproximative ale soluţiilor ecuaţiilor	285	466
V.10. Rolul derivatelor în studiul funcţiilor	288	469
V.11. Reprezentarea grafică a funcţiilor	295	473
CAPITOLUL VI. CALCULUL INTEGRAL		
VI.1. Primitive	312	474
VI.2. Integrala în sensul lui Riemann. Aplicaţii practice ale integralei	327	479
CAPITOLUL VII. PROBLEME DIVERSE		
VII.1. Probleme de sinteză	342	-
VII.2. Probleme de interdisciplinaritate	356	-
VII.3. Probleme date la olimpiade	360	-
VII.4. Probleme date la bacalaureat	367	-
VII.5. Probleme date la admiterea în facultate	381	-
ANEXĂ. NOŢIUNI TEORETICE	395	-
BIBLIOGRAFIE	485	-

Scanned with OKEN Scanner

CUVÎNT ÎNAINTE

Lucrarea de față conține 1001 probleme de analiză matematică sau adiacente înțelegerii acestor noțiuni. Ea se adresează elevilor de liceu, celor care se pregătesc pentru examenul de bacalaureat sau admitere în facultate, profesorilor de matematică în munca lor la catedră, perfecționării și altor categorii de cititori interesați.

Problemele sînt interesante, selecționate de-a lungul anilor din revistele și publicațiile de specialitate cu autori menționați în bibliografie; culegerea de probleme conține și probleme originale. O serie de paragrafe, judicios întocmite, cum ar fi cele referitoare la funcțiile periodice, funcțiile convexe, funcțiile cu proprietatea lui Darboux sau cele uniform continue, completează armonios manualele cu probleme riguros și gradat construite, respectînd în general principiul de la simplu la complex.

Ultimul capitol selecționat cu probleme de sinteză, interdisciplinaritate sau spicuiri din problemele de analiză matematică date la olimpiade, bacalaureat sau admitere în facultate, are rolul de a incita interesul elevilor, invitînd la meditație asupra ideii de performanță.

Anexa, cu aceeași structură, urmărește teoretic modalitățile de abordare a problemelor date în paragrafele lucrării, fiind practic un memorator al celor mai importante noțiuni, formule și raționamente matematice utilizate în cadrul analizei matematice din liceu.

Recomand prezenta culegere de probleme a profesorului Victor Geangalău cu convingerea că, prin conținutul, maniera de abordare și noutățile introduse, se va înscrie pe linia lucrărilor de prestanță, suscitînd interesul și aprecierea celor ce le-a fost adresată.

Conf.dr. Gh.Radu
Univ. Al.I.Cuza Iași

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

I.1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Fie propozițiile p: „2 este număr impar",
q: „7 este număr prim".

Să se formeze propozițiile *non* p, *non* q, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ și să se stabilească valorile de adevăr corespunzătoare.

Soluție

non p: „2 nu este număr impar", $V(\text{non } p) = A$

non q: „7 nu este număr prim", $V(\text{non } q) = F$

$p \vee q$: „2 este număr impar sau 7 este număr prim", $V(p \vee q) = A$

$p \wedge q$: „2 este număr impar și 7 este număr prim", $V(p \wedge q) = F$, deci noua propoziție este o propoziție falsă.

$p \Rightarrow q$: „dacă 2 este număr impar, atunci 7 este număr prim", $V(p \Rightarrow q) = A$

$p \Leftrightarrow q$: „2 este număr impar dacă și numai dacă 7 este număr prim", $V(p \Leftrightarrow q) = F$.

2. Să se stabilească legile lui de Morgan

a) non $(p \wedge q) \leftrightarrow [(\text{non } p) \vee (\text{non } q)]$

b) non $(p \vee q) \leftrightarrow [(\text{non } p) \wedge (\text{non } q)]$

oricare ar fi valorile de adevăr ale propozițiilor p și q.

Soluție

Vom demonstra legile cu ajutorul unor tabele de forma:

a)

p	q	$p \wedge q$	non $(p \wedge q)$	non p	non q	(non p) $\vee$ (non q)	non $(p \wedge q) \leftrightarrow$ [(non p) $\vee$ (non q)]
A	A	A	F	F	F	F	A
A	F	F	A	F	A	A	A
F	A	F	A	A	F	A	A
F	F	F	A	A	A	A	A

Urmărind ultima coloană, rezultă că echivalența este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

b)

p	q	$p \vee q$	non$(p \vee q)$	non$p$	non$q$	(non$p$)$\wedge$(non$q$)	non$(p \vee q) \leftrightarrow$ [(non$p$)$\wedge$(non$q$)]
A	A	A	F	F	F	F	A
A	F	A	F	F	A	F	A
F	A	A	F	A	F	F	A
F	F	F	A	A	A	A	A

3. Să se precizeze mulțimea perechilor de numere întregi astfel încît $x^2 - 4y^2 = 0$.

Soluție

Aplicăm „raționamentul prin echivalențe succesive" și avem:

$$x^2 - 4y^2 = 0 \leftrightarrow (x - 2y)(x + 2y) = 0 \leftrightarrow [(x - 2y = 0) \vee (x + 2y = 0)] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [(x = 2y) \vee (x = -2y)] \leftrightarrow S = \{(2y, y), (-2y, y)\},\ y \in Z$$

4. Fie E mulțimea numerelor naturale divizibile prin 6 și prin 4. Demonstrați că propoziția p: „$(\forall\, x \in E)$, x este număr divizibil prin 24" este falsă.

Soluție Aplicăm raționamentul prin negație (contra-exemplul).

non p: „$(\exists\, x \in E)$, x nu este divizibil prin 24" este adevărată căci există un x și anume $x = 12 \in E$, ce nu este divizibil prin 24.

Avem $V(non\ p) = A$, deci $V(p) = F$.

5. Să se arate că dacă $n \in \mathbf{N}$, atunci $n^2 + n$ este par.

Soluție

Aplicăm raționamentul prin disjuncție de caz și avem:

Dacă n este par, atunci $\exists\, k \in \mathbf{N}$ astfel încît $n = 2k$, de unde $n^2 + n = n(n + 1) = 2k(2k + 1)$ par, deci $n^2 + n$ este par.

Dacă n este impar, atunci $\exists\, k \in \mathbf{N}$ astfel încît $n = 2k + 1$, de unde $n^2 + n = n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 2) = 2(2k + 1)(k + 1)$ par, deci $n^2 + n$ este par.

6. O funcție $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$ este continuă într-un punct $x_0 \in E$, dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît $\forall\, x \in E$ cu proprietatea $|x - x_0| < \delta$, avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funcția f este discontinuă în $x_0 \in E$ dacă nu

Scanned with OKEN Scanner

este continuă în x_0. Să se precizeze cînd $f : E \to \mathbb{R}$ este discontinuă într-un punct x_0, negîndu-se proprietatea prin care s-a definit continuitatea.

Soluţie

Funcţia $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$ este discontinuă într-un punct $x_0 \in E$, dacă $\exists\, \epsilon > 0$, astfel încît $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, x \in E$ cu proprietatea $|x - x_0| < \delta$ şi $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

7. Să se arate că oricare ar fi valorile de adevăr ale propoziţiilor p, q, r avem:

$$[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

Soluţie

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	F	A	A	A	F	A	A
A	F	A	A	A	F	A	A	A
A	F	F	F	F	F	F	F	A
F	A	A	A	F	F	F	F	A
F	A	F	A	F	F	F	F	A
F	F	A	A	F	F	F	F	A
F	F	F	F	F	F	F	F	A

Urmărind ultima coloană se observă că echivalenţa este adevărată.

8. Se consideră propoziţiile p: „$a, b \in \mathbb{C}$"; q: „$a = b$"; r: „$a^3 = b^3$". Este adevărată implicaţia: $p \wedge r \Rightarrow q$?

Soluţie $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0$, de unde $a = b$ sau $a = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \cdot b$. Implicaţia este falsă.

9. Arătaţi că următoarele propoziţii sînt false, demonstrînd că negaţiile lor sînt propoziţii adevărate:

Scanned with OKEN Scanner

P_1: „$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, n compus, $\exists$ un divizor al lui n cuprins între $\frac{n}{4}$ și $\frac{n}{3}$"

P_2: „$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, n compus, $\exists$ un număr prim cuprins între n și $\frac{4n}{3}$".

P_3: „$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, n compus, $\exists$ cel puțin un divizor al acestuia, diferit de 1 și mai mic decît $\sqrt[3]{4n}$".

Soluție

non P_1 este adevărată căci numărul 36 nu admite nici un divizor cuprins între $\frac{36}{4}$ și $\frac{36}{3}$;

non P_2 este adevărată, exemplu $n = 8 \rightarrow \frac{4\cdot 8}{3} = 10 + \frac{2}{3}$; non P_3 adevărată, exemplu

$n = 49$, $(\sqrt[3]{a\cdot 49} < 6)$.

10. Demonstrați prin raționamentul prin disjuncție de caz că $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ este divizibil prin 3.

Soluție

Se disting trei cazuri: $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

11. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x + y \leq 1$" unde x și y desemnează numere reale. Arătați că propoziția $(\forall y)(\exists x)\ p(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)\ p(x, y)$ este falsă.

12. Demonstrați prin raționamentul prin recurență (metoda inducției matematice) că $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $7 \mid 3^{2n} - 2^n$.

13. Fie propozițiile: p_1: „$x = 2$", p_2: „$y = 3$", p_3: „$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$", p_4: „$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$", p_5: „$x \in \mathbb{R}^*$", p_6: „$y \in \mathbb{R}^*$".

Să se arate că $p_1 \wedge p_2 \leftrightarrow p_3 \wedge p_4 \wedge p_5 \wedge p_6$.

14. Fie propozițiile: p_1: „$a, b, c \in \mathbb{R}$", p_2: „$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$";

Scanned with OKEN Scanner

p_3: „$a = b = c$", p_4: „$a + b + c = 0$".

Să se arate că $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow p_3 \vee p_4$.

Soluție Implicația de demonstrat rezultă din identitatea

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2],$$

care se poate obține dezvoltînd în două modalități determinantul $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

15. Dacă $A(x)$ și $B(x)$ sînt proprietăți definite pe o mulțime E, negați propozițiile următoare:

„$(\forall x \in E)\,[A(x) \wedge \text{non } B(x)]$", „$(\forall x \in E)\,[A(x) \vee \text{non } B(x)]$",

„$(\exists x \in E)\,[A(x) \wedge \text{non } B(x)]$", „$(\exists x \in E)\,[A(x) \vee \text{non } B(x)]$".

Soluție

„$(\exists x \in E)\,[\text{non } A(x) \vee B(x)]$", „$(\exists x \in E)\,[\text{non } A(x) \wedge B(x)]$",

„$(\forall x \in E)\,[\text{non } A(x) \vee B(x)]$", „$(\forall x \in E)\,[\text{non } A(x) \wedge B(x)]$".

I.2 MULȚIMI

16. Să se demonstreze că $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x - [x]}{x},\ x \geq 1\right\} = \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Soluție Fie $y = \frac{x - [x]}{x}$ un element al mulțimii din enunț, notată cu M. Deoarece $x \geq 1 \Rightarrow x \geq [x]$, avem $\frac{x - [x]}{x} \geq 0$. Din $[x] \geq 1$ și $x - [x] < 1$ rezultă $x - [x] < [x]$, adică $\frac{[x]}{x} > \frac{1}{2}$.

Avem $\frac{x - [x]}{x} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, deci $0 \leq \frac{x - [x]}{x} < \frac{1}{2}$, adică $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, de unde $M \subset \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Pentru propoziția reciprocă fie

Scanned with OKEN Scanner

$z \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Avem succesiv:

$$0 \le z < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -z \le 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - z \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{1}{1-z}, \Rightarrow \left[\frac{1}{1-z}\right] = 1$$

Putem scrie: $z = \dfrac{\dfrac{z}{1-z}}{\dfrac{1}{1-z}} = \dfrac{\dfrac{1}{1-z} - 1}{\dfrac{1}{1-z}} = \dfrac{\dfrac{1}{1-z} - \left[\dfrac{1}{1-z}\right]}{\dfrac{1}{1-z}}$,

unde $\frac{1}{1-z} \ge 1$ și deci $z \in M \Rightarrow \left[0, \frac{1}{2}\right) \subset M$.

Din dubla incluziune se obține că $M = \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

17. Se dă mulțimea $A = \left\{\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots \frac{1002}{1001}\right\}$.

a) Să se scrie mulțimea A folosind o proprietate caracteristică.

b) Să se determine toate elementele $x \in A$, pentru care $|x - 1| < 0{,}1$.

c) Să se arate că $\forall \epsilon > 0{,}001$, $\exists$ cel puțin un $x \in A$ cu proprietatea $|x - 1| < \epsilon$.

Soluție

a) $A = \left\{x \in Q \mid x = \frac{2n}{2n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots, 501\right\}$.

b)

$$\frac{2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1} > 1 \Rightarrow \text{„}|x - 1| < 0{,}1 \leftrightarrow x - 1 < 0{,}1\text{”} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{10} \Rightarrow 2n > 11 \Rightarrow n \in \{6, 7, 8, \ldots, 501\}$$

deci

n	6	7	8	...	501
$x = \frac{2n}{2n-1}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{16}{15}$	...	$\frac{1002}{1001}$

Scanned with OKEN Scanner

c) Vom arăta că inecuația $\left|\frac{2n}{2n-1} - 1\right| < \epsilon$ are cel puțin o soluție în mulțimea $\{1, 2, 3, ..., 501\}$, $\forall \epsilon > 0{,}001$. Avem:

$$\left|\frac{2n}{2n-1} - 1\right| < \epsilon \leftrightarrow n > \frac{\epsilon + 1}{2\epsilon}$$

$$\epsilon > 0{,}001 \leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < 1000 \leftrightarrow 1 + \frac{1}{\epsilon} < 1001 \leftrightarrow \frac{\epsilon + 1}{2\epsilon} < 500 + \frac{1}{2}$$

Cum $501 > 500 + \frac{1}{2} > \frac{\epsilon + 1}{2\epsilon}, \forall \epsilon > 0{,}001$, rezultă că inegalitatea $n > \frac{\epsilon + 1}{2\epsilon}$ este satisfăcută de cel puțin un element al mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 501\}$. Pentru $n = 501$, $x = \frac{1002}{1001}$.

18. Găsiți expresia funcției caracteristice pentru diferența simetrică a două mulțimi $A, B \subset E$.

Soluție

$$f_{A \triangle B} = f_{(A - B) \cup (B - A)} = f_{(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})} = f_A \cdot f_{\bar{B}} + f_B \cdot f_{\bar{A}} - f_A \cdot f_{\bar{B}} \cdot f_B \cdot f_{\bar{A}} =$$

$$f_A \cdot (1 - f_B) + f_B \cdot (1 - f_A) - f_A \cdot f_B \cdot (1 - f_A - f_B + f_A \cdot f_B) = (f_A - f_B)^2,$$

deci $f_{A \triangle B} = (f_A - f_B)^2$.

19. Să se demonstreze că $\forall A, B \subset E$ cu $A \cap B \neq \varnothing$ avem $C_E B - C_E(A \cup B) = A - B$. Ce se întîmplă în cazul cînd $A \cap B = \varnothing$?

Soluție I

Arătăm că $C_E B - C_E(A \cup B) \subseteq A - B$.

$$\forall x \in [C_E B - C_E(A \cup B)] \Rightarrow x \in C_E B \wedge x \notin C_E(A \cup B) \Rightarrow$$

$$(x \notin B) \wedge (x \in A \cup B) \Rightarrow [(x \notin B) \cap (x \in A)] \cup [(x \notin B) \cap (x \in B) =$$

$$= [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \cup \varnothing \Rightarrow x \in A - B$$

deci $C_E B - C_E(A \cup B) \subset A - B$.

Reciproc: $\forall x \in A - B \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow (x \notin C_E A) \wedge (x \in C_E B) \Rightarrow (x \in C_E B) \wedge (x \notin C_E(A \cup B)) \Rightarrow x \in (C_E B - C_E(A \cup B))$,

Scanned with OKEN Scanner

deci $A - B \subset C_E B - C_E(A \cup B)$.

Din cele două incluziuni rezultă că cele două mulțimi sînt egale.

Soluție II

Utilizăm funcția caracteristică.

Trebuie să arătăm că $f_{\overline{B} - \overline{A \cup B}} = f_{A - B}$.

$$f_{\overline{B} - \overline{A \cup B}} = f_{\overline{B} \cap (A \cup B)} = f_{\overline{B}} \cdot (f_A + f_B - f_A \cdot f_B) =$$

$$= (1 - f_B)(f_A + f_B - f_A \cdot f_B) = f_A + f_B - f_A \cdot f_B - f_B \cdot f_A - f_B^2 + f_A \cdot f_B^2 =$$

$$= f_A + f_B - 2f_A \cdot f_B - f_B + f_A \cdot f_B = f_A - f_A \cdot f_B$$

$$f_{A - B} = f_{A \cap \overline{B}} = f_A \cdot f_{\overline{B}} = f_A \cdot (1 - f_B) = f_A - f_A \cdot f_B$$

De unde $f_{\overline{B} - \overline{A \cup B}} = f_{A - B} \leftrightarrow \overline{B} - \overline{A \cup B} = A - B$.

Dacă $A \cap B = \varnothing$, egalitatea se păstrează.

20. Să se determine mulțimile:

a) $E = \left\{x \in Z \,/\, x = \dfrac{4n - 5}{2n - 1},\ n \in Z\right\}$

b) $F = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, \lambda \in \mathbb{R} - \{-1\},\ x = \dfrac{2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda + 1}\right\}$

Soluție

a) $x = \dfrac{4n - 2 - 3}{2n - 1} = \dfrac{2(2n - 1) - 3}{2n - 1} = 2 - \dfrac{3}{2n - 1}$.

Trebuie ca

$$2n - 1 \,/\, 3 \rightarrow (2n - 1 = \pm 1) \vee (2n - 1 = \pm 3) \rightarrow n \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

de unde $\begin{cases} x = -1,\ x = 5,\ x = 1,\ x = 3 \\ n = 1,\ n = 0,\ n = 2,\ n = -1 \end{cases}$. Rezultă că $E = \{-1, 1, 3, 5\}$.

b) $x = \dfrac{2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda + 1} \leftrightarrow 2\lambda^2 - \lambda(x + 1) - 1 - x = 0$

$$\Delta_\lambda = [-(x + 1)]^2 - 8(-1 - x) = x^2 + 10x + 9 \geq 0 \rightarrow$$

$$\Delta_x = 100 - 36 = 64 > 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-10 \pm 8}{2} \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -9$$

Scanned with OKEN Scanner

x	$-\infty$		-9		-1		$+\infty$
$x^2 + 10x + 9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$x \in (-\infty, -9] \cup [-1, +\infty) = T$$

21. Fiind date mulțimile A, B, C, să se demonstreze că:

$$(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$$

Soluție Fie perechea ordonată $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times B$ sau $(x, y) \in A \times C \Rightarrow (x \in A)$ și $(y \in B$ sau $y \in C)$; adică $x \in A$ și $y \in B \cup C \rightarrow (x, y) \in A \times (B \cup C)$.

Rezultă deci că: $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Pentru a avea egalitate se demonstrează analog că

$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$$

22. Să se determine mulțimile:

a) $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{N}^* - \mathbb{R}_-^*$

b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_+$ $\quad \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}_+$ $\quad \mathbb{Z} - \mathbb{N}$

c) $Q_+^* \cup Q_-$ $\quad Q_+^* \cap Q_-$ $\quad Q_- \cup Q_+^*$

d) $Q_- \cup \mathbb{Z}$ $\quad Q_- \cap \mathbb{Z}$ $\quad Q \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{I}$

Soluție

a) $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}_+$
$\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}^*$
$\mathbb{N}^* - \mathbb{R}_-^* = \mathbb{N}^*$

b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$
$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$
$\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}_-^*$

c) $Q_+^* \cup Q_- = Q$
$Q_+^* \cap Q_- = \varnothing$
$Q_- - Q_+^* = Q_-$

d) $Q_- \cup \mathbb{Z}_- = Q_-$
$Q_- \cap \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}_-$
$Q \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

23. Într-o urnă sînt a bile albe și b bile negre. Se extrage cîte o bilă, fără a se pune în urnă, pînă ce se obțin x bile albe. Să se afle repartiția

Scanned with OKEN Scanner

variabilei aleatoare Y ce dă numărul de bile extrase din urnă pînă ce s-au obţinut x bile albe.

Soluţie Considerăm A_y evenimentul de a extrage y bile pentru a obţine x bile albe, A_{y_1} obţinerea a $(x-1)$ bile albe în $(y-1)$ extrageri şi A_{y_2} obţinerea unei bile albe la a y-a extragere. Mulţimile A_{y_1} şi A_{y_2} ca evenimente sînt dependente şi $A_y = A_{y_1} \cap A_{y_2}$,

$P(A_y) = P(A_{y_1} \cap A_{y_2}) = P(A_{y_1}) \cdot P(A_{y_2})$.

După schema bilei neîntoarse obţinem:

$$P(A_{y_1}) = \frac{C_a^{x-1} \cdot C_b^{y-x}}{C_{a+b}^{y-1}}; \quad P_{A_{y_1}}(A_{y_2}) = \frac{a-x+1}{a+b-y+1}$$

De unde $P(A_y) = \frac{a-x+1}{a+b-y+1} \cdot \frac{C_a^{x-1} \cdot C_b^{y-x}}{C_{a+b}^{y-1}}$ cu condiţia:

$x \le y \le b + x$ şi $a \ge x$ (condiţia pentru combinări). Repartiţia variabilei aleatoare Y este dată de tabloul Y: $\begin{pmatrix} y \\ P(A_y) \end{pmatrix}$, $x \le y \le b + x$.

24. Se consideră mulţimile A, B, C unde $A = \{x \in \mathbb{N}^* / x \le 5\}$, $B = \{x \in Z^* / -1 \le x \le 3\}$ şi $C = \{x / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

Se cere: a) $(A \times B) - (B \times C)$; b) C^2; c) $(B - A) \times \{1\}$.

R. a) {(1,-1), (3,-1), (4,-1), (4,1), (4,2), (4,3), (5,-1), (5,1), (5,2), (5,3), (2,-1)}

b) {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)}

c) {(1,-1)}.

25. Determinaţi mulţimile A şi B date prin următoarele condiţii:

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A \cup \{3,4,5\} = \{1,3,4,5,6,8,9\}$

$B \cup \{2,4,8\} = \{2,4,5,6,7,8,9\}$

$A \cap B = \{4,6,9\}$

R. $A = \{1,3,4,6,8,9\}$, $B = \{2,4,5,6,7,9\}$.

26. Ce legătură există între mulţimile B şi C dacă avem simultan relaţiile $A \cup B = A \cup C$ şi $A \cap B = A \cap C$?

R. Se verifică dubla incluziune $B \subset C$ şi $C \subset B$, deci $B = C$.

Scanned with OKEN Scanner

27. Fie mulţimile $A = \{a,b\}$ şi $B = \{b,c\}$.
Ce relaţie de incluziune există între $P(A \cap B)$ şi $P(A) \cap P(B)$?
Dar între $P(A \cup B)$ şi $P(A) \cup P(B)$?
R. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ şi $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.

28. Notăm cu $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ numărul de feţe care pot apărea la aruncarea unui zar. Dacă aruncăm de trei ori zarul, rezultatul va fi triplet de forma (x,y,z) cu $x,y,z \in E$. Să se calculeze numărul de elemente distincte (astfel încît x,y,z să fie distincte)
R. $n = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

29. Fie $E_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ce legătură de incluziune există între $P(E_{n+1})$ şi $P(E_n)$?
R. $P(E_n) \subset P(E_{(n+1)})$.

30. Fie $A = \{-1,1\}$. Să se calculeze perimetrul şi aria figurii geometrice rezultate prin unirea punctelor mulţimii A^2.
R. Elementele mulţimii A^2 reprezintă coordonatele vîrfurilor unui pătrat de latură 2. Perimetrul este egal cu 8 iar aria cu 4.

31. Ce relaţie de incluziune există între mulţimile $A = \{\sqrt[10]{32}, 3\sqrt{2}, \sqrt{3^{\frac{1}{2}}}\}$ şi $B = \{2\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt{18}\}$.
R. $A \subset B$.

32. Demonstraţi cu ajutorul funcţiei caracteristice a unei mulţimi următoarele egalităţi, $(A,B,C,D \subset E)$.
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
c) $(A \cup B \cup C) \cap (B \cup D) = (A \cap D) \cup B \cup (C \cap D)$
d) $[(A \cup B) - C] \cup [(B \cup C) - A] \cup [(C \cup A) - B] = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
e) $A \cap A = A \cup A$
f) $[(A \cup B) - B] \cup (A \cap B) = A$
g) $A \cap B - C = (A - C) \cap (B \cap C_E\, c)$

33. Să se scrie ca intervale mulţimile:
a) $C_{\mathbb{R}}(-\infty,0]$; b) $C_{\mathbb{R}}(-2,1)$; c) $C_{\mathbb{R}}[-4,+\infty)$; d) $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.
R. a) $C_{\mathbb{R}}(-\infty,0] = \mathbb{R} - (-\infty,0] = (0,+\infty)$

Scanned with OKEN Scanner

b) $C_{\mathbb{R}}(-2,1) = \mathbb{R} - (-2,1) = (-\infty,-2) \cup [1,+\infty)$
c) $C_{\mathbb{R}}[-4,+\infty) = \mathbb{R} - [-4,+\infty) = (-\infty,-4)$
d) $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \varnothing$

34. Cine este mulţimea $\mathbb{Q} \Delta \mathbb{I}$?

R. $\mathbb{Q} \Delta \mathbb{I} = (\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}) - (\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}) = \mathbb{R} - \varnothing = \mathbb{R}$

Observaţie: Mai general, dacă $A \cap B = \varnothing$ atunci $A \Delta B = A \cup B$.

I.3. INEGALITĂŢI

35. Pentru ce valori ale numărului natural n au loc relaţiile:

a) $\frac{(n+2)}{2n+10} < \frac{3}{8}$

b) $\left|\frac{(n+2)}{3n+1} - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{6}$

c) $\left|\frac{1+5^n}{3+5^n} - 1\right| < \frac{1}{2}$

d) $\left(\frac{4n+1}{n+1}, 4\right) < \frac{1}{10}$

e) $\frac{(5n+1)!}{(5n+2)!} > \frac{1}{10}$

f) $\frac{C^2_{n+3}}{A^3_{n+3}} > \frac{1}{P_3}$

g) $\frac{4n^2}{3n+1} > 1$

h) $\frac{1}{\log_{n+2} 2} + \frac{1}{\log_2 (n+2)} < 2$

i) $2 \ln^2(n^4) - 3 \ln(n^2)^3 - 14 \leq 0$?

R.

a) Deoarece $n \in \mathbb{N}$, $2n + 10 > 0$ şi avem: $8n + 16 < 6n + 30 \Leftrightarrow 2n < 14 \Leftrightarrow n < 7$ deci $n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

b) $\left|\frac{n+2}{3n+1} - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \left|\frac{5}{3(3n+1)}\right| > \frac{1}{6} \Leftrightarrow 30 > 9n+3 \Leftrightarrow n < 3$, deci $n \in \{0,1,2\}$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\left|\frac{1+5^n}{3+5^n}-1\right|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3+5^n}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5^n>1$; $n \in \mathbb{N}^*$

d) $\left(\frac{4n+1}{n+1},4\right)<\frac{1}{10} \Leftrightarrow \left|\frac{4n+1}{n+1}-4\right|<\frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{n+1}<\frac{1}{10} \Leftrightarrow n>29$

e) $\frac{(5n+1)!}{(5n+2)!}>\frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{5n+2}>\frac{1}{10} \Leftrightarrow 5n+2<10 \Leftrightarrow n<\frac{8}{5}$; $n \in \{0,1\}$

f) $\frac{C^2_{n+3}}{A^3_{n+3}} \geq \frac{1}{P_3} \Leftrightarrow \frac{\frac{(n+3)!}{(2!(n+1)!}}{\frac{(n+3)!}{n!}} \geq \frac{1}{3!} \Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)} \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow n+1 \leq 3 \Leftrightarrow n \leq 2$

deci $n \in \{0,1,2\}$

g) $\frac{4n^2}{3n+1}>1 \Leftrightarrow 4n^2-3n-1>0$

Asociem ecuaţia $4n^2-3n-1=0 \Leftrightarrow n_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{8}=\frac{3\pm5}{8}$; $n_1=1, n_2=-\frac{1}{4}$

$n \in \{2,3,4...\}$

h) $\frac{1}{\log_{(n+2)}2}+\frac{1}{\log_2(n+2)} \leq 2 \Leftrightarrow \log_2(n+2)+\frac{1}{\log_2(n+2)} \leq 2$

Notăm $\log_2(n+2) = x$ şi obţinem ecuaţia

$x+\frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0$, inegalitate adevărată doar pentru $x = 1$, de unde $\log_2(n+2) = 1$ şi deci $n = 0$.

i) $2 \ln^2(n^4) - 3 \ln(n^2)^3 - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 32 \ln^2 n - 18 \ln n - 14 \leq 0$,

de unde rezolvînd ecuaţia de gradul doi ataşată ecuaţiei avem:

$\ln n=\frac{9\pm\sqrt{81+448}}{32}=\frac{9\pm23}{32}$; $\ln n=1$ şi $\ln n=-\frac{7}{16}$ şi deci $n = e$ şi $n=e^{-\frac{7}{16}}$;

$n \in \{0,1,2\}$, $(e \approx 2,7)$

36. Să se exprime cu ajutorul modulului inegalităţile:

a) $-1 < x < 7$; b) $x-\frac{1}{2} \leq y \leq x+\frac{1}{2}$; c) $a < x < b$.

R. a) Observînd că trei este mijlocul intervalului (-1,7) scriem inegalitatea în modul următor: $3 - 4 < x < 3 + 4$ sau $-4 < x - 3 < 4 \Leftrightarrow |x-3| < 4$

b) Într-adevăr putem scrie $-\frac{1}{2} \leq y-x \leq \frac{1}{2}$ şi ţinînd cont de proprietăţile modulului avem $|y - x| \leq 1/2$

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă modulul a < x < b, scriem

$$\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}<x<\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2} \Leftrightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}.$$

R. 37 Să se rezolve inegalitățile:

a) $|x+5|<1$; b) $|x-2| \geq 0,1$;

c) $|x-1|-|x+2|>3$; d) $1<|x|<5$;

e) $|x^2-4x+3|<|x-1|$

Soluție

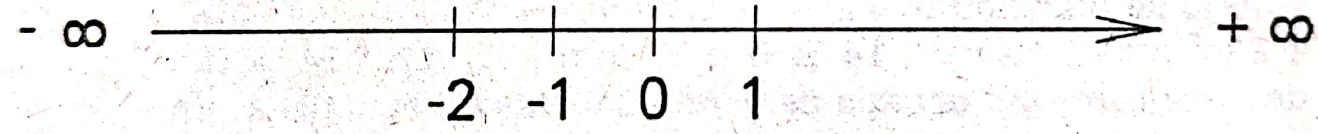
a) Datorită proprietăților modulului avem $|x+5|<1 \Leftrightarrow -1<x+5<1 \Leftrightarrow -1-5<x<1-5 \Leftrightarrow -6<x<-4 \Leftrightarrow x \in (-6,-4)$

b) $|x-2| \geq 0,1 \Leftrightarrow x-2 \in (-\infty; 0,1] \cup [0,1; +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1,9] \cup [2,1; +\infty)$

c) $$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x-1>0 \\ 0, & \text{dacă } x-1=0 \\ -x+1, & \text{dacă } x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x>1 \\ 0, & x=1 \\ -x+1, & x<1 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{dacă } x+2>0 \\ 0, & \text{dacă } x+2=0 \\ -x-2, & \text{dacă } x+2<0 \end{cases} = \begin{cases} x+2, & x>-2 \\ 0, & x=-2 \\ -x-2, & x<-2 \end{cases}$$

Axa reală este împărțită astfel:



și inegalitatea devine $-x+1+x+2>3$ sau $0x>0$ cu soluția imposibilă $S_1 = \emptyset$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Dacă $x=-2$, înlocuind în inegalitate avem $|-2-1|-|-2+2|>3 \Leftrightarrow 3>3$, imposibil, deci -2 nu este soluție a inegalității.

Pentru $x \in (-2,1)$, $|x-1| = -x+1$, $|x+2| = x+2$

Înlocuind în inegalitate avem: $-x+1-x+2>3 \Leftrightarrow -2x>4 \Leftrightarrow x<-2$ și $S_2 = (-\infty,-2) \cap (-2,1) = \emptyset$

Dacă $x=1$, $|x-1|-|x+2| = |1-1|-|1+2|>3 \Leftrightarrow -3>3$ absurd, $x=1$ nu este soluție.

Studiem ultimul interval $x \in (1, +\infty)$: $|x-1| = x-1$, $|x+2| = x+2$ de unde $x-1-x-2>3$, $0x>6$, absurd, $S_3 = \emptyset$

Cum $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \emptyset$ rezultă că inegalitatea dată nu are soluție în mulțimea numerelor reale.

Scanned with OKEN Scanner

d) $1<|x|<5=\begin{cases}|x|>1\\|x|<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\-5<x<5\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-5,-1)\cup(1,5)$

e) Studiem semnul polinomului $f(x)=x^2-4x+3$ ataşîndu-i ecuaţia

$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm2}{2}$ cu $x_1=3$ şi $x_2=1$.

Pentru $x\in(-\infty,1)$ obţinem soluţia $S_1=(1,2)\cap(-\infty,1)=\varnothing$.
Dacă $x=1$ rezultă $0<0$, deci 1 nu este soluţie şi $S_2=\varnothing$.
Pentru $x\in(1,3)$, $S_3=\{(-\infty,1)\cup(2,+\infty)\}\cap(1,3)=(2,3)$.
Dacă $x=3$ avem $0<2$, deci $S_4=\{3\}$.
Pentru $x\in(3,+\infty)$, avem $x^2-4x+3<x-1\Leftrightarrow x^2-5x+4<0\Leftrightarrow S_5=(1,4)\cap(3,+\infty)=(3,4)$.
Soluţia finală este $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5=(2,4)-\{3\}$.

38. Să se arate că dacă $a_1, a_2, \dots a_n$ sînt numere strict pozitive, atunci:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\dots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\dots+a_n}+\dots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}\geq\frac{n}{n-1}$$

Soluţie

Notăm $a_1+a_2+\dots+a_n=S$ atunci:

$$\frac{\frac{S}{S-a_1}+\frac{S}{S-a_2}+\dots+\frac{S}{S-a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{S^n}{(S-a_1)(S-a_2)\dots(S-a_n)}}=$$

$$=\frac{S}{\sqrt{(S-a_1)(S-a_2)\dots(S-a_n)}}$$

Dar $\sqrt[n]{(S-a_1)(S-a_2)\dots(S-a_n)}\leq\frac{(S-a_1)+(S-a_2)+\dots+(S-a_n)}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot S$.

Prin urmare $\frac{S}{S-a_1}+\frac{S}{S-a_2}+\dots+\frac{S}{S-a_n}\geq\frac{n^2}{n-1}$, de unde

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\dots+\frac{a_n}{S-a_n}=-n+\frac{S}{S-a_1}+\dots+\frac{S}{S-a_n}\geq\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1}$$

39. Să se arate că pentru $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq2$, $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea: $a_1+a_2+\dots+a_n\leq\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)!}{a_1!\cdot a_2!\cdot\dots\cdot a_n!}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie Notăm pe $a_1+a_2+\ldots+a_n=S_n\in\mathbb{N}$.

Demonstrăm prin inducţie asupra lui n.

Pentru n = 2 trebuie să avem $a_1=a_2=1$ şi inegalitatea este

$1+1\le\frac{(1+1)!}{1!\cdot1!}\Leftrightarrow 2\le 2$ (evidentă).

Presupunem inegalitatea adevărată pentru $S\le\frac{S!}{a_1!\cdot a_2!\cdot\ldots\cdot a_n!}$, şi demonstrăm că se menţine pentru S + 1.

Într-adevăr

$$\frac{(S+1)!}{a_1!\cdot a_2!\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot(a_n+1)!}=\frac{S!}{a_1!\cdot a_2!\cdot\ldots a_n!}\cdot\frac{S+1}{a_n+1}\ge$$

$$\ge(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot\frac{S+1}{a_n+1}\ge S+1$$

deoarece, evident $a_1+a_2+\ldots+a_n\ge a_n+1$.

40. Să se arate că dacă, a, b, c > 0 atunci:

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\ge\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Soluţie Din inegalitatea $(a+b)^2\ge 4ab$ rezultă $\frac{a+b}{4ab}\ge\frac{1}{a+b}$ sau $\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\ge\frac{1}{a+b}$. Analog avem: $\frac{1}{4a}+\frac{1}{4c}\ge\frac{1}{a+c}$ şi $\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}\ge\frac{1}{b+c}$.

Adunăm cele 3 inegalităţi şi avem: $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\ge\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$.

41. Să se arate că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ sînt n numere reale strict pozitive, atunci:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}+\sqrt[n]{c_1c_2\ldots c_n}\le\sqrt[n]{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\ldots(a_n+b_n+c_n)}$$

Soluţie Scriind inegalitatea lui Cauchy, relativă la media aritmetică şi geometrică, avem:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2+c_2}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+b_n+c_n}}\le\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i+c_i}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{b_2}{a_2+b_2+c_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n+b_n+c_n}} \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i+c_i}\right)$$

$$\sqrt[n]{\frac{c_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{c_2}{a_2+b_2+c_2}+\ldots+\frac{c_n}{a_n+b_n+c_n}} \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i+b_i+c_i}\right)$$

Prin adunarea acestor trei inegalități obținem o inegalitate echivalentă cu cea din enunț.

42. Fie numerele $a < b < c$ și funcția $f:[a, c]\to\mathbb{R}$, continuă pe $[a,c]$ și de două ori derivabilă pe (a, c).

Notăm: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}$

Dacă f este convexă pe [a,c], atunci $\Delta \ge 0$, iar dacă f este concavă pe [a,c], $\Delta \le 0$.

Demonstrație: Fie funcția $g(x) = f(x) + Mx^2 + Nx + P$. Să determinăm numerele reale M, N, P astfel încît $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. Sîntem conduși la sistemul compatibil determinat:

$$\begin{cases} Ma^2+Na+P=-f(a) \\ Mb^2+Nb+P=-f(b) \\ Mc^2+Nc+P=-f(c) \end{cases}$$

de unde deducem $M=-\left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\right]$.

Deoarece $g(a) = g(b)$ și $g(b) = g(c)$, rezultă că $\exists\, x_1 \in (a, b)$ și $x_2 \in (b, c)$ astfel încît $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$, de unde deducem existența numărului $x_0 \in (x_1, x_2)$ cu proprietatea $g''(x_0) = 0$, deci $f''(x_0) + 2M = 0$, sau $2M = -f''(x_0)$. Dacă f' este convexă pe [a, c] avem $f''(x_0) \ge 0$, deci $M \le 0$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $\Delta \ge 0$.

Raționamentul este analog și în cazul cînd f este concavă pe [a,c].

43. Să se demonstreze că dacă $|x| \le 1$, atunci inegalitatea $(1-x)^n + (1+x)^n \le 2^n$ este satisfăcută pentru orice număr natural.

Soluție Folosind formula binomului lui Newton avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$(1-x)^n+(1+x)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k[1+(-1)^k]x^k=\sum_{k=1}^{n}2C_n^{2k}x^{2k}\le 2\sum_{k=1}^{n}C_n^{2k}=2^n$$

ţinînd seama că $\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k}=2^{n-1}$.

Inegalitatea poate fi demonstrată şi prin inducţie.

44. Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ sînt numere pozitive astfel încît $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$, atunci $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ge 2^n$.

Soluţie Fie

$$E=(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)=\frac{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$

Prin urmare $E^2=(1+a_1)(1+\frac{1}{a_1})(1+a_2)(1+\frac{1}{a_2})\ldots(1+a_n)(1+\frac{1}{a_n})$.

Dar $(1+a_i)(1+\frac{1}{a_i})=2+a_i+\frac{1}{a_i}\ge 2^2$ deoarece $a+\frac{1}{a}\ge 2$, dacă $a>0$.

Deducem că $E^2\ge(2^2)^n$ şi deci $E\ge 2^n$.

45. Cu ajutorul inegalităţii lui Jensen să se arate că

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)^\alpha\le n^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha,\ \alpha>1,\ x\ge 0.$$

Soluţie Fie funcţia $f(x)=x^\alpha\Rightarrow f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, $f''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.
Pentru $x>0$, $f''(x)>0$ deci f este convexă.

Fie $P_1=P_2\ldots=P_n=\frac{1}{n}$ ceea ce ne dă:

$$f(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Rightarrow f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Rightarrow\frac{1}{x^\alpha}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^\alpha\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha$$

46. Dacă a, b, c > 0 şi $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$.

Soluţie

$$(a+b-c)^2\ge 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2+ab-ac-bc\ge 0\Rightarrow\frac{5}{3}+2(ab-ac-bc)\ge 0\Rightarrow$$

$$ab-ac-bc\ge-\frac{5}{6}\Rightarrow ac+bc-ab\le\frac{5}{6}<1\Rightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}.$$

Scanned with OKEN Scanner

47. Să se demonstreze că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ au loc inegalităţile:

$$n<\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<1+n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$$

Soluţie Se va demonstra mai întîi propoziţia: „Dacă $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică de numere pozitive cu raţia $r>0$, atunci $\forall$ $n\in\mathbb{N}-\{1\}$ avem $\frac{n}{r}\left(\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}-1\right)<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_1}+\frac{n}{r}\left(1-\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_n}}\right)$."

Aplicăm inegalitatea mediilor numerelor pozitive distincte:

$\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\ldots,\frac{a_{n-1}}{a_n}$ şi avem: $\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\ldots+\frac{a_{n+1}}{a_n}>n\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\ldots\frac{a_{n+1}}{a_n}}=n\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$ sau

$$\frac{n}{r}\left(\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}-1\right)<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}.$$

Aplicînd aceeaşi inegalitate numerelor pozitive distincte $1,\frac{a_1}{a_2},\ldots,\frac{a_{n-1}}{a_n}$, obţinem:

$$1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}>n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_n}}\Leftrightarrow 1+\frac{a_2-r}{a_2}+\frac{a_3-r}{a_3}+\ldots+\frac{a_n-r}{a_n}>n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_n}}$$

sau

$$n-r\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)>n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_n}}\Leftrightarrow\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_1}+\frac{n}{r}\left(1-\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_n}}\right)$$

Pentru $a_1=r=1$ se găseşte inegalitatea iniţială.

48. Pentru numerele $a, b, c\in\mathbb{R}^*$, are loc inegalitatea

a) $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

b) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

R. a) Se utilizează inegalitatea $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

b) Se ţine seama că $\frac{4}{a+b}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

49. Este adevărată afirmaţia $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}>\sqrt[3]{24}$?

Scanned with OKEN Scanner

R. Se notează $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ și se ridică la puterea a 3-a. Se găsește că afirmația este falsă.

50. Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

R. Se utilizează inegalitatea $\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$ *pentru* $k<n$.

51. Să se arate că $\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$.

R. Se demonstrează prin inducție și cu ajutorul binomului lui Newton notînd $\sqrt[n]{n}=1+x$, $x>0$.

52. Să se arate că dacă $(a-1)(b-1)\geq 0$, atunci $(ab)^{2n-1}+2^n \geq 2^{n-1}(a+b)+1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

R. Se demonstrează prin inducție.

53. Să se găsească regiunea din planul xOy pentru care sînt verificate simultan relațiile $4x+2y=1$ și $x^2+y^2\geq\frac{1}{20}$.

R. Se reprezintă grafic dreapta și cercul.

54. Dacă h_a, h_b, h_c sînt înălțimile unui triunghi ABC iar r raza cercului înscris atunci $h_a+h_b+h_c>6r$.

Soluție $S=\frac{ah_a}{2}=pr$; $S=\frac{bh_b}{2}=pr$; $S=\frac{ch_c}{2}=pr$, unde $p=\frac{a+b+c}{2}$. Avem $b+c>a$, $a+b+c>2a$, $p>a$. Analog $p>b$ și $p>c$. Din $\frac{a}{p}\cdot h_a=2r$ avem $h_a>2r$. Asemănător $h_b>2r$ și $h_c>2r$. Prin adunare obținem $h_a+h_b+h_c>6r$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II. FUNCȚII REALE

II.1. DEFINIȚIA FUNCȚIEI. FUNCȚII EGALE ȘI FUNCȚII NEEGALE. OPERAȚII CU FUNCȚII REALE DE VARIABILĂ REALĂ

55. În mulțimea Q a numerelor raționale definim corespondența care face ca oricărui număr rațional $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ o să-i corespundă numărul $x+y$. Este această corespondență o funcție?

Soluție Corespondența $\frac{x}{y}$ nu este o funcție definită pe Q deoarece ea face ca unui număr rațional să-i corespundă mai multe numere întregi.

$$\frac{x}{y} = \frac{Kx}{Ky}, \quad K \in \mathbb{Z}, \quad K \neq 0 \rightarrow x + y \neq Kx + Ky \quad \text{pentru } K \neq 1$$

De exemplu numărul $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ este unic ca număr rațional pe cînd $3+5=8 \neq 6+10=16$, reprezintă două numere întregi diferite.

56. Fie funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.

Dacă $A=[-1,0]$, $B=[1,2)$, $C=(-1,1)$, să se determine imaginile directe și inverse prin f ale mulțimilor A,B,C.

Soluție

$$f([-1,0]) = [1,3]\ ;\ f([1,2)) = [5,7)\ ;\ f((-1,1)) = (1,5)$$

$$f^{-1}([-1,0]) = [-2,-\tfrac{3}{2}]\ ;\ f^{-1}([1,2]) = [-1,-\tfrac{1}{2})$$

$$f^{-1}((-1,1)) = (-2,-1)$$

57. Să se găsească cea mai mică (respectiv cea mai mare valoare a funcției f) unde $f(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$, $a,b>0$.

R. Se scrie, $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha) \Rightarrow f_{max}(x) = 1, f_{min}(x) = -1$ unde am notat $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$.

58. Fie E o mulțime finită cu n elemente și F o mulțime finită cu m

Scanned with OKEN Scanner

elemente. Notăm cu $S_{n,m}$ numărul aplicaţiilor definite pe E cu valori în F. Să se determine $S_{n,m}$.

R. Se demonstrează prin inducţie după n că $S_{n,m} = m^n$.

59. Să se determine domeniul de definiţie $D_f \subseteq \mathbb{R}$ pentru funcţiile următoare cu codomeniul $\mathbb{R}$, adică mulţimea acelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care f(x) are sens şi este un număr real:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$, b) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt[5]{x}$, c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$,

d) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, e) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$, f) $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$,

g) $f(x) = \log_{x-1}(x^2-4)$, h) $f(x) = \sqrt{\sin x}$, i) $f(x) = \operatorname{ctg} \Pi x$,

j) $f(x) = \arcsin \frac{4x}{1+4x^2}$, k) $f(x) = e^x$, l) $f(x) = \frac{6}{3+x^2}$,

m) $f(x) = \ln(1-x^2)$, n) $f(x) = \sin x + \cos x$, o) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$,

f) $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Soluţie a) $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$, b) $D_f = [-2, +\infty)$, c) $D_f = (-1, +\infty)$, d) $D_f = [-2,2]$, e) $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$, f) $D_f = \mathbb{R}$, g) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 > 0$ şi $x-1>0$ şi $x-1 \neq 1\}$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
x^2-4	+	+	0	−	−	−	0	+	+
$x-1$	−	−	−	−	0	+	+	+	+

$x \in \{(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)\} \cap ((1,+\infty) - \{2\}) = (2,+\infty) - \{2\} = (2,+\infty)$; $D_f = (2,+\infty)$, h) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sin x \geq 0\} = \bigcup_{n \in Z} [2n\pi, (2n+1)\pi]$,, i) $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, j) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq \frac{4x}{1+4x^2} \leq 1\}$, k) $D_f = \mathbb{R}$, l) $D_f = \mathbb{R}$, m) $D_f = (-1,1)$, n) $D_f = \mathbb{R}$, o) $D_f = (0,+\infty) = \mathbb{R}_+^*$, p) $D_f = (-1,1)$.

60. Fie $f:\{1,2,3\} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f(1)=1$, $f(2)=2$ şi $f(3)=5$. Să se construiască o prelungire $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a funcţiei f, de forma

Scanned with OKEN Scanner

$g(x)=ax^2+bx+c$.

Soluţie $\forall x\in\{1,2,3\}$ trebuie să avem $f(x)=g(x)$, deci. $g(1)=a+b+c=1$; $g(2)=4a+2b+c=2$; $g(3)=9a+3b+c=5$.

Rezolvînd sistemul găsim $a=1$, $b=-2$, $c=2$.

O prelungire a funcţiei f este deci funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2x+2$.

61. Să se precizeze două restricţii ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma $f(x)=x^2+x-1$.

Soluţie $f_1:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^2+x-1$

$f_2:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=x^2+x-1$

62. Fie $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ coordonatele unui punct din plan într-un sistem de axe de coordonate ortogonal.

a) Să se determine mulţimea punctelor M (x,y) pentru care $\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}$ este un număr real.

b) Să se arate că relaţia $\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}=1$, unde $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, defineşte o funcţie de argument x.

Soluţie

a) $\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}\in\mathbb{R}$ dacă $\begin{cases}(1-x)(1-y)\ge 0\\ xy\ge 0\end{cases}$ ceea ce este echivalent cu $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$ sau $\begin{cases}x\le 0\\ y\le 0\end{cases}$ sau $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 1\end{cases}$. Rezultă că mulţimea punctelor M (x,y) pentru care $\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}\in\mathbb{R}$, este mulţimea de puncte a planului haşurată din figura alăturată.

b) avem

$$\begin{cases}\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}=1\\ 0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\sqrt{(1-x)(1-y)}\right]^2=(1-\sqrt{xy})^2\\ 0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0\\ 0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ 0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$$

Relaţia dată defineşte o funcţie de argument x, anume funcţia identică a mulţimii [0,1].

Graficul acestei funcţii este segmentul de dreaptă cu extremităţile în punctele (0,0) şi (1,1). (Un segment din prima bisectoare).

Scanned with OKEN Scanner

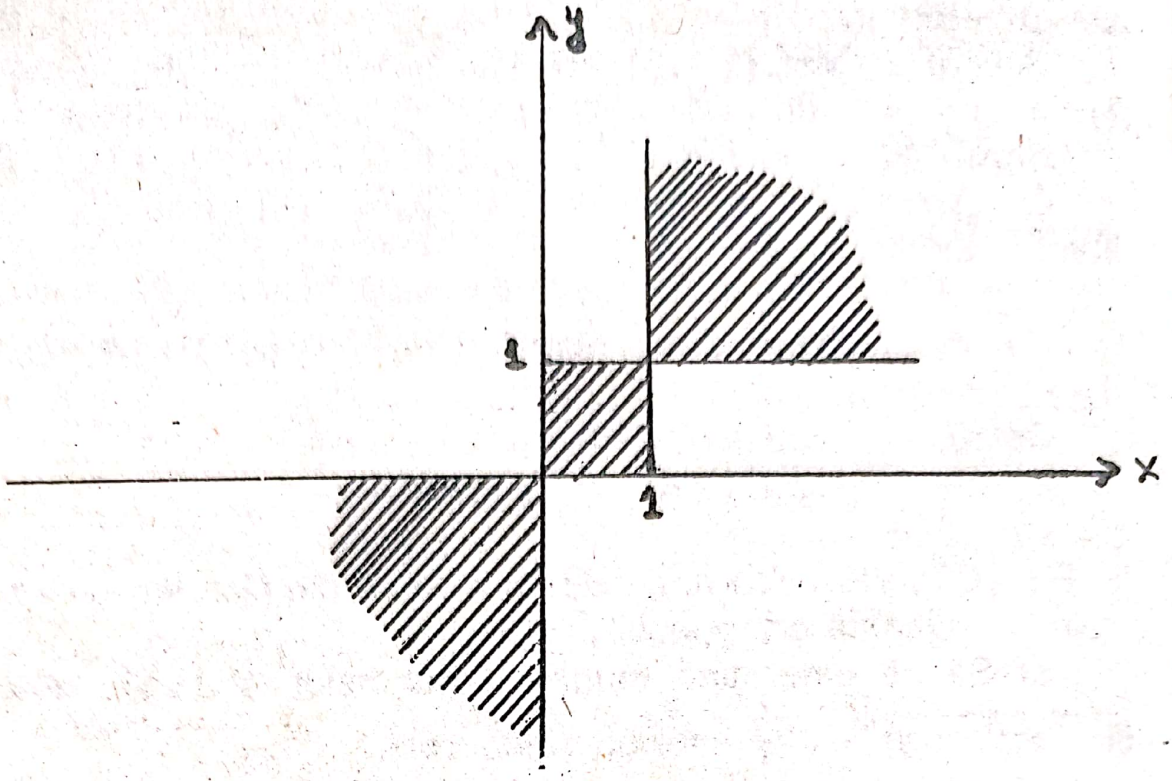


Fig. 1.

63. Următoarele exprimări sînt greșite. Să se explice de ce și să se corecteze:

a) „Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$"

b) „Fie funcția $f:[0,5]\to[0,2]$, $f(x) = x-1$"

c) „Fie funcția $f:[0,+\infty]\to[3,4]$, $f(x) = x^2$".

Soluție

a) D_f pentru $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ este $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ și nu $\mathbb{R}$ după cum este indicat în enunț. Avem posibilitățile: $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ sau păstrăm pe $\mathbb{R}$ ca domeniu de definiție și definim funcția și în punctele $x=-1$, $x=1$. Putem spune spre exemplu: „Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1}, & x \neq \mp 1 \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}"$$

b) Se observă că $f([0,5]) = [-1,4] \not\subset [0,2]$. Putem corecta astfel: „Fie funcția $f:[0,5]\to[-2,6]$, $f(x) = x-1$" deoarece $[-1,4]\subset[-2,6]$.

c) $f([0,+\infty)) = [0,+\infty)$ și nu $[3,4]$. Putem scrie spre exemplu „Fie funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$" deoarece $[0,+\infty)\subset\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

64. Fie relația $x+y-1=0$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$. Asociind oricărui element $x\in\mathbb{R}$ elementul $y\in\mathbb{R}$ astfel încît egalitatea $x+y-1=0$ să fie adevărată, definim o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de argument x. Asociind oricărui $y\in\mathbb{R}$ elementul $x\in\mathbb{R}$, astfel ca $x+y-1=0$ să fie adevărată, definim funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de argument y. Să se scrie $f(x)$ și $g(y)$.

R. $f(x)=1-x$, $g(y)=1-y$.

65. Să se precizeze mulțimea valorilor pentru fiecare din funcțiile definite pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$: a) $f(x)=2x-3$; b) $f(x)=x^2-5x+6$; c) $f(x)=-x^2+2x+5$; d) $f(x)=2^x-3$; e) $f(x)=\lg(x^2+100)$; f) $f(x)=\sin x$.

R.

a) Rezolvăm ecuația dată în raport cu x și avem $x=\frac{y+3}{2}$, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

b) Rezolvăm ecuația $x^2-5x+(6-y)=0$ și punem condiția $\Delta\geq 0$ $f(\mathbb{R})=[-\frac{1}{4},+\infty)$.

c) $f(\mathbb{R})=(-\infty,6]$.

d) $f(\mathbb{R})=(-3,+\infty)$.

e) Ecuația $x^2=10^y-100$, are rădăcini reale dacă și numai dacă $10^y-100\geq 0\Rightarrow y\geq 2$, $f(\mathbb{R})=[2,+\infty)$.

f) Prin definiție $\sin x\in[-1,1]$.

Vom nota cu $f,g:E\to F$, funcții reale de variabilă reală.

Să se cerceteze egalitatea funcțiilor f și g din exercițiile care urmează (Ex. 66—74).

66. $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $x\geq 1$

$$g(x)=\begin{cases}2, & 1\leq x\leq 2\\ 2\sqrt{x-1}, & x>2\end{cases}$$

Soluție

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(1+\sqrt{x-1})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{x-1})^2}=$$
$$=|1+\sqrt{x-1}|+|1-\sqrt{x-1}|=1+\sqrt{x-1}+|1-\sqrt{x-1}|$$

Dacă $1\leq x\leq 2$, atunci $1-\sqrt{x-1}\geq 0$, $|1-\sqrt{x-1}|=1-\sqrt{x-1}$ și $f(x)=1+\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}=2$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x>2$, atunci $1-\sqrt{x-1}<0$, $|1-\sqrt{x-1}| = \sqrt{x-1}-1$ și $f(x) = 1+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}$.

Funcțiile date sînt deci egale.

67. $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(\sin x)$,

$$g[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\Pi}{2} \\ \Pi - x, & \frac{\Pi}{2} < x < \frac{3\Pi}{2} \\ x - 2\Pi, & \frac{3\Pi}{2} \le x \le 2\Pi \end{cases}$$

Soluție Deoarece pentru $-\frac{\Pi}{2} \le x \le \frac{\Pi}{2}$ avem $\arcsin(\sin x) = x$, rezultă că dacă $0 \le x \le \frac{\Pi}{2}$, atunci $f(x) = x$, și deci $f(x) = g(x)$. Pentru $\frac{\Pi}{2} < x < \frac{3\Pi}{2}$ $\Rightarrow -\frac{3\Pi}{2} < -x < -\frac{\Pi}{2} \Rightarrow \Pi - \frac{3\Pi}{2} < \Pi - x < \Pi - \frac{\Pi}{2} \Rightarrow -\frac{\Pi}{2} < \Pi - x < \frac{\Pi}{2}$ și deci în acest caz avem $f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(\pi - x)] = \pi - x = g(x)$. În sfîrșit, dacă $\frac{3\Pi}{2} \le x \le 2\Pi$, atunci $-\frac{\Pi}{2} \le x - 2\Pi \le 0$ și deci $f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(x-2\pi)] = x - 2\pi = g(x)$.

Deoarece funcțiile f și g au același domeniu de definiție, $[0,2\pi]$, același codomeniu $\mathbb{R}$ și $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in [0,2\pi]$, rezultă că $f = g$.

68. $f:\{-2,-1,1,2\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12$

$g:\{-2,-1,1,2\}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^4-5x^2+4$

Soluție Funcțiile f și g au același domeniu de definiție și iau valori în $\mathbb{R}$. Să arătăm că $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \{-2,-1,1,2\}$.

$f(-2) = (-2)^5-3(-2)^4-5(-2)^3+15(-2)^2+4(-2)-12 = -32-48+40+60-8-12 = 0$

$g(-2) = (-2)^4-5(-2)^2+4 = 0$

$f(-1) = g(-1) = 0$; $f(1) = g(1) = 0$; $f(2) = g(2) = 0$.

69. $f(x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x}$, $x \in \mathbb{N}^*$ și

$$g(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+x}$$

($f(x) = g(x)$ reprezintă Identitatea lui Botez)

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x}$$

Scădem în ambii membrii cantitatea $-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2x}\right)$ şi avem:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+x}.$$

70. $f(x)=1+2^{4x+2}$

$g(x)=(1+2^{2x+1}+2^{x+1})(1+2^{2x+1}-2^{x+1})$, $x\in\mathbb{R}$.

Soluţie Prin verificare directă se obţine: $1+2^{4x+2}=(1+2^{2x+1}+2^{x+1})(1+2^{2x+1}-2^{x+1})$

(Identitatea lui AURIFEUILLE)

71. $f:\{k\pi,\ 2k\pi\pm\frac{\Pi}{3},\ k\in Z\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(x)$

$g:\{k\pi,\ 2k\pi\pm\frac{\Pi}{3},\ k\in Z\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sin(2x)$

R. Se calculează $f(k\pi)$, $g(k\pi)$, $f(2k\pi\pm\frac{\Pi}{3})$ şi $g(2k\pi\pm\frac{\Pi}{3})$. Se constată că $f=g$.

72. $f(x)=\cos\frac{x}{2^1}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$

$g(x)=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$, $\frac{x}{2^k}\neq k\Pi$, $k\in Z$

Soluţie

Deoarece $\sin\frac{x}{2^{k-1}}=2\sin\frac{x}{2^k}\cdot\cos\frac{x}{2^k}$ şi $\frac{x}{2^k}\neq k\Pi$, rezultă că

$$\cos\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\sin\frac{x}{2^k}},\ (k=1,2,\ldots,n)\ \text{deci}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

Prin urmare $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$, $\forall\ x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

73. $f(t)=\begin{cases}3-t, & \text{dacă } t\le 2\\ t-1, & \text{dacă } t>2\end{cases}$

$g(x)=\max(x-1,3-x)$, $x\in\mathbb{R}$

R. $f=g$.

74. $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max(4t-4t^2)$, $0\le t\le x$

$g:[0,4]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}4x-x^2, & 0\le x\le 2\\ 4, & 2<x\le 4\end{cases}$

R. $f=g$.

75. Stabiliţi domeniile de definiţie şi verificaţi dacă funcţiile sînt egale:

a) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$ şi $g(x)=x-1$

b) $f(x)=\ln(2x+1)^2$ şi $g(x)=2\ln(2x+1)$

c) $f(x)=x\sqrt{(\lg x)^2}$ $g(x)=x^2\lg x^2$

Soluţie

a) $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases}x-1, & x>1\\ 0, & x=1\\ -x+1, & x<1\end{cases}$

Domeniul de definiţie al funcţiei g este $\mathbb{R}$. A treia condiţie din definiţia funcţiilor egale nu este respectată.

b) $D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ iar $D_g=(-\frac{1}{2},+\infty)$; $f\neq g$.

c) $D_f=(0,+\infty)$, $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$; $f\neq g$.

76. Să se arate că $x^3+b^3+c^3-3bcx=(x+b+c)\cdot$

Scanned with OKEN Scanner

$\cdot (x^2+b^2+c^2-bx-cx-bc)$, $\forall\, x,b,c \in \mathbb{R}$.

Soluție Notăm $f(x) = x^3+b^3+c^3-3bcx$ și $g(x) = (x+b+c)\cdot(x^2+b^2+c^2-bx-cx-bc)$

Fie $f(x) = \begin{vmatrix} x & b & c \\ c & x & b \\ b & c & x \end{vmatrix} = x^3+b^3+c^3-3bcx.$

În același determinant adunăm la elementele liniei întîi elementele corespunzătoare celorlalte linii.

$$\begin{vmatrix} x & b & c \\ c & x & b \\ b & c & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+b+c & x+b+c & x+b+c \\ c & x & b \\ b & c & x \end{vmatrix} = (x+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & x & b \\ b & c & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+b+c)(x^2+b^2+c^2-bx-cx-bc)$$

Deci $f = g$.

77. Să se verifice identitatea (Hermite):

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+\ldots+[x+\frac{n-1}{n}] = [nx], \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ şi } n \in \mathbb{N}$$

(unde prin $[x]$ am notat partea întreagă a lui x).

Soluție Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = [x]+[x+\frac{1}{n}]+\ldots+[x+\frac{n-1}{n}]$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = [nx]$.

Trebuie să arătăm că $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Fie $n \in \mathbb{N}$, fixat și $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$h(x) = [x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\ldots+[x+\frac{n-1}{n}]-[nx]$$

Pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ avem:

$$h(x+\frac{1}{n}) = [x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\ldots+[x+\frac{n-1}{n}]+[x+\frac{n}{n}]-[nx+1] = h(x)$$

deci h este periodică de perioadă principală $T = \frac{1}{n}$. Cum $[x+\frac{i}{n}] = 0$, $\forall\, 0 \le x < \frac{1}{n}$ și $1 \le i \le n-1$, rezultă că $h(x) = 0$, $\forall\, x \in [0, \frac{1}{n})$. Prin urmare, $h = 0$, deci

78. Să se demonstreze că $(\forall x \in \mathbb{R})$, este adevărată egalitatea

Scanned with OKEN Scanner

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+\ldots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx],\ \forall x\in\mathbb{R}\ \text{şi}\ n\in\mathbb{N}$$

$[2x]-[x]=[x+\frac{1}{2}]$.

Soluţie Fie $x=k+r$, $k\in\mathbb{Z}$, $0\le r<1$.
Considerăm mai întîi cazul

a) $0\le r<\frac{1}{2}$. Avem: $[2x]=[2(k+r)]=[2k+2r]=2k$,

$[x]=[k+r]=k$, $[x+\frac{1}{2}]=[k+r+\frac{1}{2}]=k$, de unde rezultă

$[2x]-[x]=2k-k=k=[x+\frac{1}{2}]$.

b) dacă $\frac{1}{2}\le r<1$, atunci $[2x]=[2(k+r)]=[2k+2r]=2k+1$,

$[x]=[k+r]=[k]$, $[x+\frac{1}{2}]=[k+r+\frac{1}{2}]=k+1$ şi deci

$[2x]-[x]=2k+1-k=k+1=[x+\frac{1}{2}]$.

79. Să se verifice identitatea:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 2^2x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^nx}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^nx,\ \forall x\neq k\frac{\pi}{2^i},\ 1\le i\le n,\ k\in\mathbb{Z}$$

R. Se foloseşte identitatea: $\operatorname{ctg}2^{k-1}x-\operatorname{ctg}2^kx=\frac{1}{\sin 2^kx}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

80. Fie funcţiile:

$f:\{-1,0\}\to\mathbb{R}$ $f(x)=1+x$,

$g:\{-1,0\}\to\mathbb{R}$ $g(x)=\sqrt{1-x^2}$,

$h:\{-1,0\}\to\mathbb{R}$ $h(x)=-1+\sqrt{4+2x-x^2}$,

$k:\{-1,0\}\to\mathbb{R}$ $k(x)=1-\sqrt{-2x-x^2}$.

Să se verifice că $f=g=h=k$.

R. Se calculează valorile funcţiilor în -1 şi 0.

81. Fie date funcţiile:

Scanned with OKEN Scanner

$$f:(-\infty,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } -\infty<x\le 2\\ 0, & \text{dacă } -2<x\le 0\\ 2x, & \text{dacă } 0<x\le 3\end{cases}$$

$$g:[-3,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } -3\le x\le 0\\ -x, & \text{dacă } 0<x<2\\ 0, & \text{dacă } x\ge 2\end{cases}$$

Să se construiască funcţiile $s=f+g$ şi $c=\frac{g}{f}$.

Soluţie Suma $s=f+g$ este definită pe $(-\infty,3]\cap[-3,+\infty)=[-3,3]$ în modul următor:

$$S(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} x+x=2x, & \text{dacă } -3\le x\le -2\\ 0+x=x, & \text{dacă } -2<x\le 0\\ 2x-x=x, & \text{dacă } 0<x<2\\ 2x+0=2x, & \text{dacă } 2\le x\le 3\end{cases}$$

ceea ce se poate scrie restrîns astfel:

$$S(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } |x|<2\\ 2x, & \text{dacă } x\in[-3,-2]\cup[2,3]\end{cases}$$

Cîtul $c=\frac{g}{f}$ este definit pe $[-3,3]-(-2,0]=[-3,-2]\cup(0,3]$ în modul următor:

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases} \frac{x}{x}=1, & \text{dacă } -3\le x\le -2\\ -\frac{x}{2x}=-\frac{1}{2}, & \text{dacă } 0<x<2\\ 0, & \text{dacă } 2\le x\le 3\end{cases}$$

82. Fie date funcţiile:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\le 0\\ 1, & \text{dacă } x>0\end{cases}$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases} -x, & \text{dacă } x\le 1\\ 0, & \text{dacă } x>1\end{cases}$$

Să se formeze funcţiile $S=f+g$ şi $p=f\cdot g$.

Soluţie Întrucît funcţiile f şi g sînt definite pe $\mathbb{R}$, $f+g$, $f\cdot g$ vor fi definite tot pe $\mathbb{R}$ în modul următor:

$$S(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} x-x=0, & \text{dacă } x\le 0\\ 1-x, & \text{dacă } 0<x\le 1\\ 1+0, & \text{dacă } x>1\end{cases}=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x\le 0\\ 1-x, & \text{dacă } 0<x\le 1\\ 1, & \text{dacă } 1<x\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$p(x) = f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x \le 0 \\ -x, & \text{dacă } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

83. Fie funcțiile

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x \le 0 \\ 2x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \le 2 \\ x+1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

Să se determine funcțiile $S = f+g$, $d = f-g$, $p = f\cdot g$, $c = \frac{f}{g}$.

Soluție $S(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{dacă } x \le 0 \\ 3x, & \text{dacă } 0 < x \le 2 \\ 3x+1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$

$$d(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \le 0 \\ x, & \text{dacă } 0 < x \le 2 \\ x-1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases} \quad p(x) = \begin{cases} x^2-x, & \text{dacă } x \le 0 \\ 2x^2, & \text{dacă } 0 < x \le 2 \\ 2x^2+2x, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x}, & \text{dacă } x \le 0 \\ 2, & \text{dacă } 0 < x \le 2. \\ \frac{2x}{x+1}, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

84. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2$
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = (x-2)^2$

Să se determine funcțiile sumă $s = f+g$ și cît $c = \frac{f}{g}$.

Soluție $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $s(x) = (x+2)^2 + (x-2)^2 = 2x^2 + 8$.

$$C:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R},\ c(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$$

85. Să se definească funcțiile sumă, diferență și produs pentru următoarele funcții:

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

$g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$

Soluție Nu se pot defini $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ pentru că f și g nu au

Scanned with OKEN Scanner

aceeași mulțime de definiție: $[0,\infty)\cap(-\infty,0)=\phi$.

86. Fie date funcțiile

$$f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1, & -2\le x\le 0\\ x+1, & 0<x\le 1\\ e^x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$g:[-1,3]\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}\ln(x^2+1), & -1\le x\le 0\\ 2x, & 0<x\le 3\end{cases}$$

$$h:[-2,1]\to\mathbb{R},\ h(x)=\begin{cases}x^2, & -2\le x<0\\ \dfrac{1}{x+1}, & 0\le x\le 1\end{cases}$$

Să se formeze funcțiile $f+g+h$, $f-g+h$, $f\cdot g\cdot h$, $\dfrac{f}{g}\cdot h$.

Scanned with OKEN Scanner

87. Funcţia f este definită pe $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Pentru $\forall$ x avem $f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x$. Să se afle toate aceste funcţii f.

Soluţie În egalitatea $f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x$ facem substituţia $x \to \frac{1}{1-x}$ şi obţinem:

$$f(\frac{1}{1-x})+f(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}})=\frac{1}{1-x} \Rightarrow f(\frac{1}{1-x})+f(\frac{1-x}{-x})=\frac{1}{1-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{1-x})+f(1-\frac{1}{x})=\frac{1}{1-x}$$

Facem acum $x \to 1-\frac{1}{x}$ şi avem:

$$f(1-\frac{1}{x})+f(\frac{1}{1-1+\frac{1}{x}})=1-\frac{1}{x} \Rightarrow f(1-\frac{1}{x})+f(x)=1-\frac{1}{x}$$

Din sistemul:

$$\begin{cases} f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x \\ f(\frac{1}{1-x})+f(1-\frac{1}{x})=\frac{1}{1-x} \\ f(1-\frac{1}{x})+f(x)=1-\frac{1}{x} \end{cases}$$

, obţinem că:

$f(x)+f(\frac{1}{1-x})+f(1-\frac{1}{x})=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{1-x}+1-\frac{1}{x})$, de unde:

$f(x)+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}(x+1+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x})$, sau:

$f(x)=\frac{1}{2}(x+1+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}-\frac{2}{1-x})$, sau;

$f(x)=\frac{1}{2}(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x})$

88. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie dată şi $a\in\mathbb{R}$, fixat. Să se determine funcţia

Scanned with OKEN Scanner

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că $3f(a-x) + 2f(x-a) = g(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Soluție Înlocuim x cu $a-x$ în relația din enunț și obținem $3f(x) + 2f(-x) = g(a-x)$.

Punem în ecuația obținută $x \to -x$ și avem: $3f(-x) + 2f(x) = g(a+x)$.

Rezolvînd sistemul format de ultimele două ecuații avem: $f(x) = \dfrac{3g(a-x) - 2g(a+x)}{5}$ care este tocmai legea funcției căutate.

89. Se se determine toate funcțiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ care verifică proprietățile:

a) $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [1,\infty)$;

b) $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x,y \in (0,\infty)$.

Soluție Facem pe $x = y$ și obținem $f(x^2) = 2f(x)$, $\forall\, x \in (0,\infty)$, de unde folosind metoda inducției matematice complete, avem: $f(x^n) = n \cdot f(x)$, $\forall\, x \in (0,\infty)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Făcînd pe $x = 1$, obținem $f(1) = 0$.

Deoarece: $f(x\frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = 0$, obținem $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$, și deci $f(x^{-n}) = nf(x^{-1}) = -nf(x)$.

Deoarece $q\cdot f(x^{\frac{p}{q}}) = f(x^p) = p\cdot f(x)$, $\forall\, p,q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $\forall\, x \in (0,\infty)$, rezultă $f(x^{\frac{p}{q}}) = \dfrac{p}{q}\cdot f(x)$.

Dar funcția f este strict crescătoare. Întradevăr, dacă $0 < x < y$, atunci există $k > 1$ astfel încît $y = kx$, și deci: $f(y) = f(kx) = f(x) + f(k) > f(x)$, deoarece prin ipoteză, $f(k) \geq 0$.

Fie acum α irațional. Presupunem că $f(x^\alpha) < \alpha f(x)$. Rezultă atunci că există $r \in \mathbb{Q}$, astfel încît: $f(x^\alpha) < rf(x) < \alpha f(x)$, deci $f(x^\alpha) < f(x^r)$, deci $x^\alpha < x^r$, de unde, alegînd $x > 1$ ($0 < x < 1$, anolog iar pentru $x = 1$, $f(1^\alpha) = \alpha f(1) = 0$) implică $\alpha < r$. Pe de altă parte, ținînd cont că $f(x) > 0$, rezultă $r < \alpha$ adică în contradicție cu $\alpha < r$. Analog se arată că nu putem avea $f(x^\alpha) > \alpha f(x)$. Rezultă deci: $f(x^\alpha) = \alpha f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\forall\, \alpha\in\mathbb{R}$.

Fie, în final, $x = 10$; atunci pentru orice $t \in \mathbb{R}$ există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încît $t = 10^\alpha$. De aici, $\alpha = \lg t$, deci $f(t) = f(10)\cdot \lg t$.

90. Să se determine funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ cu proprietatea $\dfrac{f(x+y)}{f(x-y)} = \dfrac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$, $\forall\, x \neq y$, $x,y \in \mathbb{Z}$ și astfel încît $f(1) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție Remarcăm mai întîi că pentru orice $x \neq 0$ avem $\frac{f(x)}{f(x)} = \frac{f(x)+f(0)}{f(x)-f(0)}$, de unde rezultă că $f(0) = 0$ și că pentru orice $y \neq 0$ avem $\frac{f(y)}{f(-y)} = \frac{f(y)}{-f(y)}$, deci $f(-y) = -f(y)$, $\forall\, y \in Z$.

Fie $f(2) = a$. Atunci $a \in Z$ și $a = 1$.

Avem:

$f(3) = \frac{f(2+1)}{f(2-1)} = \frac{f(2)+f(1)}{f(2)-f(1)} = \frac{a+1}{a-1}$; $\frac{f(4)}{f(2)} = \frac{f(3)+f(1)}{f(3)-f(1)} = a$, de unde $f(4) = a^2$; $\frac{f(5)}{f(3)} = \frac{f(4)+f(1)}{f(4)-f(1)} = \frac{a^2+1}{a^2-1}$, de unde $f(5) = \frac{a^2+1}{(a-1)^2}$.

Condiția ca $f(3) \in Z$ ne dă $a \in \{-1,0,2,3\}$, care împreună cu condiția $f(5) \in Z$, implică $a = 2$.

Atunci $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ și se verifică prin inducție că $f(n) = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, problema are soluția $f(z) = z$, $\forall\, z \in Z$.

91. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică inegalitățile $f(x+1) \leq x \leq f(x)+1$, pentru $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

R. Din inegalitatea $x \leq f(x)+1 \Rightarrow f(x) \geq x-1$. Înlocuind x cu $x-1$ în inegalitatea $f(x+1) \leq x$ obținem $f(x) \leq x-1$. Din cele două inegalități obținute rezultă că $f(x) = x-1$.

92. Să se demonstreze că nu există nici o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încît să existe relația $f(x) + f(1-x) = x$.

Soluție Presupunem prin absurd că există o funcție $f(x)$ cu proprietatea cerută. Dăm lui x valorile particulare $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$. Obținem două egalități $\begin{cases} f(0)+f(1) = 0 \\ f(1)+f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow$ contradicție.

93. Să se determine mulțimea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încît $f^2(x) = x^2$.

Soluție: Evident există imediat patru funcții $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_1(x) = |x|$, $f_1(x) = -|x|$ care satisfac această egalitate, și în general orice funcție alcătuită dintr-o reuniune a restricțiilor lor, astfel încît reunind domeniile de definiție a acestor restricții să obținem axa reală, adică în fond alcătuind o partiție a axei reale.

Forma generală a funcțiilor ar fi: $f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \subseteq R \\ -x, & x \in C_A \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

94. Să se determine funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că:

$$\begin{cases} f(x+6)+2g(2x+15)=\dfrac{x+2}{2} \\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right)+g(x+5)=x+4 \end{cases}, \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Soluție Notăm $\dfrac{x+2}{2}=y+6$, adică $x=2y+10$, și astfel ecuația a doua din enunț devine $f(y+6)+g(2y+15)=2y+14$. Sistemul dat se mai poate scrie: $\begin{cases} f(x+6)+2g(2x+15)=\dfrac{x+2}{2} \\ f(x+6)+g(2x+15)=2x+14 \end{cases}$ de unde obținem $g(2x+15)=-\dfrac{3}{2}x-13$.

Notăm $2x+15=y$, adică $x=\dfrac{y-15}{2}$. Ecuația $g(2x+15)=-\dfrac{3}{2}x-13$ devine $g(y)=-\dfrac{3}{4}y-\dfrac{7}{4}$, sau $g(x)=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{4}$, adică am determinat legea funcției g. Pentru a determina funcția f folosim relația obținută $g(2x+15)=-\dfrac{3}{2}x-13$, de unde $2g(2x+15)=-3x-26$, iar prima ecuație devine $f(x+6)-3x-26=\dfrac{x+2}{2}$, de unde $f(x+6)=\dfrac{7}{2}x+22$. Notînd $x+6=y$ obținem $f(y)=\dfrac{7}{2}(y-6)+22=\dfrac{7}{2}y+1$, de unde $f(x)=\dfrac{7}{2}x+1$.

Prin urmare, am obținut $f(x)=\dfrac{7}{2}x+1$ și $g(x)=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{4}$, care verifică sistemul dat.

95. Să se demonstreze că nu există nici o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să verifice relația: $f(x)+f(n-x)=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție Facem $x=0$ și avem $f(0)+f(n)=0$, apoi facem $x=n$ și avem $f(n)+f(0)=n$.

Se obține contradicția $n=0$.

96. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\{-1,0,1,2\}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)+f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)=x$.

Scanned with OKEN Scanner

R. $f(x) = \frac{4x+5}{3(1-x)}$.

97. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\}$ cu proprietatea că $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x^3$, $\forall\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

R. Se înlocuiește x cu $-\frac{1}{x}$, apoi rezolvăm sistemul format cu ecuația inițială și noua ecuație. Obținem $f(x) = \frac{2}{3x^3} - \frac{x^3}{3}$.

98. Există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea: $f(x-1) - f(1-x) = x$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$?

R. Nu există.

99. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ având proprietatea: $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

R. Facem $y = x$ și $f(2x) - f(0) = 4x^2$. Punem $f(0) = a$ și înlocuim x cu $\frac{x}{2}$. Obținem $f(x) = a + x^2$.

100. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încît $f(1) \neq 0$ și $f(x)\cdot f(y) = f(x+y-xy)$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

R. Se face $y = 1$ și se obține că f este o funcție constantă.

101. Să se determine funcția f care verifică relația: $4f(x) + 3f(-x) = c|x|$, $c\in\mathbb{R}$.

R. Se înlocuiește x cu $-x$ și se rezolvă sistemul obținut. Se obține $f(x) = \frac{c}{7}|x|$.

102. Există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încît $f(x) - f(-x) = x^2$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$?

R. Nu există.

103. Să se afle funcția care verifică relația: $m\,f(\frac{a+x}{c+x}) + n\,f(\frac{a-x}{c-x}) = kx$

Soluție Înlocuim pe x cu $-x$

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{array}{l|l} m\,f\left(\frac{a+x}{c+x}\right)+n\,f\left(\frac{a-x}{c-x}\right)=kx & m \\ n\,f\left(\frac{a+x}{c+x}\right)+m\,f\left(\frac{a-x}{c-x}\right)=-kx & -n \end{array}$$

$(m^2-n^2)\,f\left(\frac{a+x}{c+x}\right)=kx(m+n) \Rightarrow f\left(\frac{a+x}{c+x}\right)=\frac{kx}{m-n}$ şi notînd

$\frac{a+x}{c+x}=t \Rightarrow x=\frac{ct-a}{1-t} \Rightarrow f(t)=\frac{k}{m-n}\cdot\frac{ct-a}{1-t} \Rightarrow f(x)=\frac{k(cx-a)}{(m-n)(1-x)}$.

104. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie astfel încît $f(x)\cdot f(y)=x\cdot f(y)+y\cdot f(x)-x\cdot y$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$. Să se determine funcţia f şi să se arate că este unică.

R. Pentru $x=y$ obţinem $f^2(x)-2xf(x)+x^2=0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ deci $(f(x)-x)^2=0$, adică $f(x)=x$.

Unicitatea se demonstrează prin metoda reducerii la absurd.

II.3. FUNCŢII INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE

105. Să se formeze două restricţii injective ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma $f(x)=x^2-4$.

Soluţie $f_1:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^2-4$.

$f_2:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=x^2-4$.

106. Fie $f:A\to B$ o funcţie. Să se arate că f este injectivă $\Leftrightarrow f(CA')\subset Cf(A')$, $\forall\, A'\in\mathcal{P}(A)$.

Soluţie Presupunem f injectivă. Fie $b\in f(CA')$. Atunci $\exists\, a\in CA'$ astfel încît $b=f(a)$, deci $a\notin A'$. Dacă $b\in f(A')$ atunci există $a'\in A'$ cu $b=f(a')$. Cum f este injectivă, $a=a'$ şi avem $a\in A'$, contradicţie. Rezultă $b\notin f(A')$, adică $b\subset Cf(A')$. Deci $f(CA')\subset Cf(A')$. Reciproc, fie $x\neq y$. Notăm $A'=\{x\}$. Avem $y\in CA'$ şi deci $f(y)\in f(CA')\subset Cf(A')$ de unde $f(y)\notin f(A')$; cum $f(A')=\{f(x)\}$ obţinem $f(y)\neq f(x)$ şi f este injectivă.

107. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$ definită astfel: $x=k+r$, $k\in Z$ şi $0\le r<1$, atunci $[x]=k$. Este această funcţie injectivă?

Soluţie Funcţia f nu este injectivă căci există numerele reale x_1,

Scanned with OKEN Scanner

x_2, $x_1 \neq x_2$ astfel ca $f(x_1) = f(x_2)$. Într-adevăr, pentru $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ avem $[1] = [\frac{3}{2}] = 1$.

108. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x\in(-\infty,2] \\ mx-3, & \text{dacă } x\in(2,+\infty) \end{cases}$

a) Să se determine m astfel încît graficul funcției să treacă prin punctul A(3,3);

b) Să se cerceteze dacă funcția f este injectivă.

R. a) $m = 2$; b) $f(1) = f(\frac{5}{2}) = 2$, f nu este injectivă.

109. Să se arate că există funcții neinjective pentru care suma să fie injectivă.

Soluție Iată un exemplu: fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x-x^2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x+x^2$. Funcțiile f și g nu sînt injective, pe cînd $f(x) + g(x) = 2x$ este o funcție injectivă.

110. Fie mulțimea $E = \{0,1\}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3, & \text{dacă } x\in E \\ x+3, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}-E \end{cases}$$

Să se arate că f este injectivă.

111. Să se arate că funcția $f(x) = \max(x+1, 2x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ este injectivă.

R. $\max(x+1, 2x-1) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x\leq 2 \\ 2x-1, & \text{dacă } x>2 \end{cases}$

Se poate utiliza graficul funcției f(x).

112. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \min(-x,x)$ nu este injectivă.

R. $f(-1) = \min(1,-1) = -1$, $f(1) = \min(-1,1) = -1$ și deci $f(-1) = f(1)$.

113. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax^{2n} + bx^{2n-1} + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}-\{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că funcția f nu este injectivă.

Soluție Să găsim elementele care merg în c prin funcția f. Avem:

Scanned with OKEN Scanner

$ax^{2n} + bx^{2n-1} + c = c \Leftrightarrow ax^{2n} + \frac{bx^{2n}}{x} = 0, x \neq 0 \Rightarrow x^{2n}(a + \frac{b}{x}) = 0$, de unde $x_1 = 0$ și $x_2 = -\frac{b}{a}$. Deci există $x_1 \neq x_2$ astfel încît $f(x_1) = f(x_2) = c$, ceea ce ne arată că funcția f nu este injectivă.

114. Să se arate, utilizînd graficul, că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2) \\ 3x - 6, & \text{dacă } x \in [2, +\infty) \end{cases}$, este injectivă.

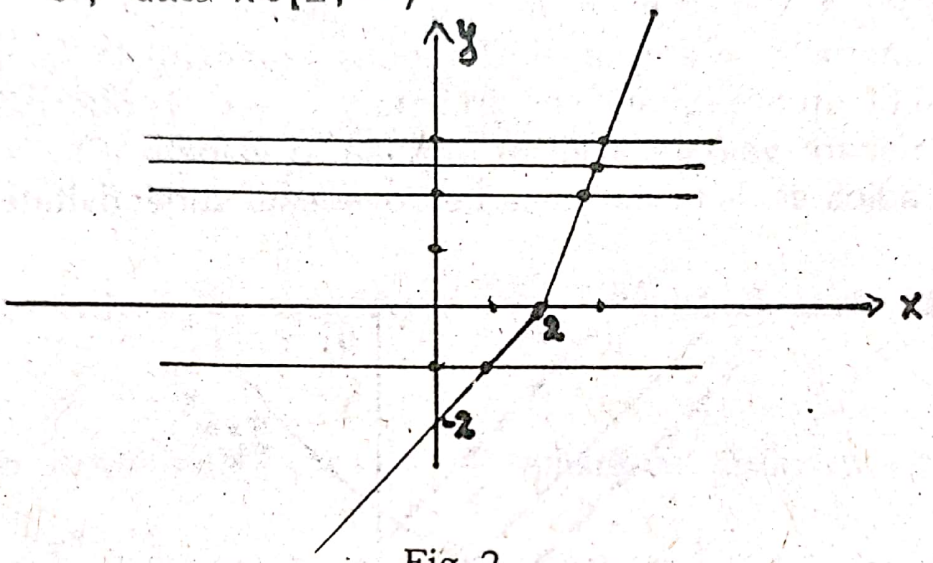


Fig. 2.

Soluție În figura alăturată se observă că orice paralelă la axa absciselor intersectează graficul într-un singur punct și deci funcția este injectivă.

115. Fie funcția $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

Să se precizeze dacă funcția este sau nu surjectivă.

Soluție O funcție $f:E\to F$ este surjectivă dacă ecuația cu necunoscuta x, $f(x) = y$, are cel puțin o soluție în E, oricare ar fi $y \in F$.

În cazul funcției date, ecuatia $\frac{x+1}{x-2} = y$ nu are soluții în $\mathbb{R}-\{2\}$ oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, ecuația se scrie $x(y-1) = 2y+1$ și pentru $y = 1$ nu are soluții.

Funcția considerată nu este surjectivă.

116. Fie funcția $f:E\to[-4, +\infty)$, $f(x) = x^2-6x+5$, E fiind o mulțime de numere reale astfel că ecuația cu două necunoscute $x+y = 6$ nu are

Scanned with OKEN Scanner

soluții în $E \times E$.

Să se arate că această funcție nu este surjectivă.

Soluție În $[-4, +\infty)$ există numere care nu sînt valori ale funcției. Într-adevăr, funcția nu ia valoarea -4, căci ecuația $x^2-6x+5 = -4$ are soluția $x = 3$ și $3 \notin E$. Dacă 3 ar aparține lui E, atunci $x+y = 6$ ar avea soluția $x = 3$, $y = 3$ în $E \times E$.

117. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a^x+x$, $a > 1$.

Să se arate că f este surjectivă.

Soluție $\forall\, m\in\mathbb{R}$ avem $m = a^x+x$ sau $m-x = a^x$.

Funcția $y_1 = a^x$ reprezintă funcția exponențială, iar $y_2 = m-x$, o mulțime de drepte paralele cu dreapta $y = -x$. Se observă pe grafic că pentru fiecare valoare a lui m obținem o valoare a lui x pentru care $y_1 = y_2$, adică $a^x = m-x$, ceea ce dovedește surjectivitatea.

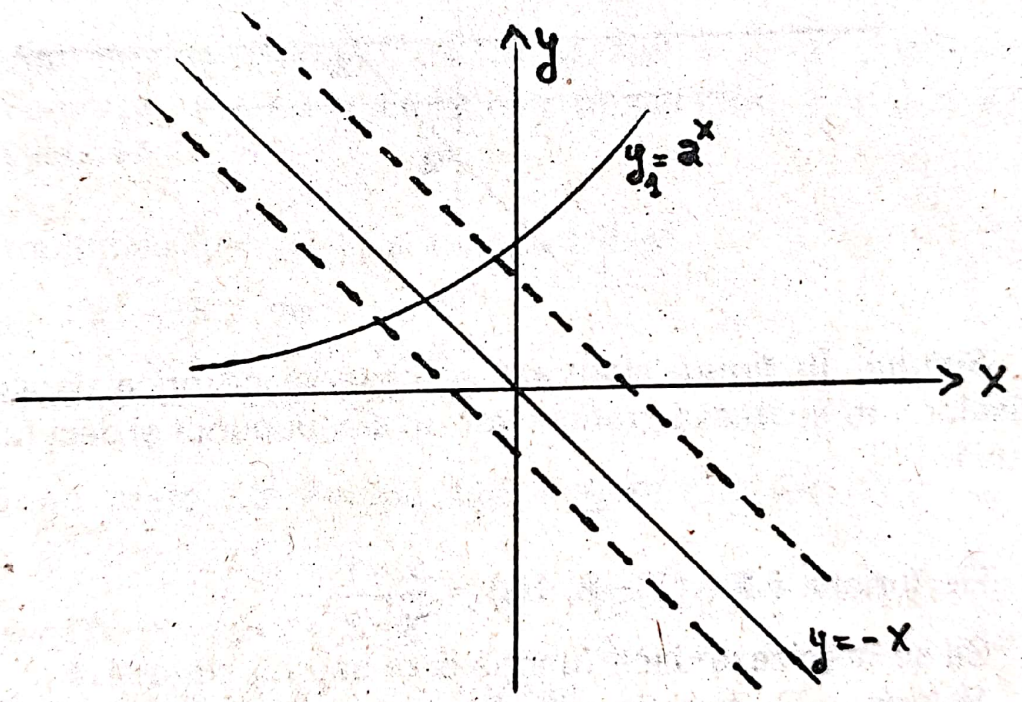


Fig. 3.

118. Să se arate că funcția $f:(-\infty,0]\to[0,\pi)$, $f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ este surjectivă.

Soluție $\forall\ y\in[0,\pi]$, avem $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = y$ de unde

Scanned with OKEN Scanner

$x^2 = \frac{1-\cos y}{1+\cos y} = \operatorname{tg}^2\frac{y}{2}$, cu $\cos y \neq -1$, deoarece $y \neq \pi$. De aici rezultă că $x = -\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ deoarece $x \in (-\infty, 0]$.

119. Să se arate că funcţia care ataşează fiecărui dreptunghi numărul real şi pozitiv, egal numeric cu aria sa, reprezintă o surjecţie, sau o aplicaţie a mulţimii dreptunghiurilor pe mulţimea numerelor reale şi pozitive.

Soluţie Fiind dat orice număr real şi pozitiv, se poate construi cel puţin un dreptunghi care să aibă o arie numeric egală cu acest număr (de exemplu, dreptunghiul care are lunghimea egală numeric cu numărul dat şi lăţimea de o unitate de măsură).

120. Fie $f:(-1,0)\to(\frac{5}{11}, \frac{1}{2})$, $f(x) = \frac{2x^2+3}{5x^2+6}$. Să se arate că f este surjectivă.

Soluţie Arătăm că $\forall\, y \in (\frac{5}{11}, \frac{1}{2})$ există cel puţin un $x \in (-1,0)$ astfel încît $\frac{2x^2+3}{5x^2+6} = y$. Rezolvînd această ecuaţie în raport cu x obţinem $x = \pm\sqrt{\frac{3-6y}{5y-2}}$ şi deoarece $x < 0$, rezultă că x—ul căutat este $-\sqrt{\frac{3-6y}{5y-2}}$. Se arată că dacă $y \in (\frac{5}{11}, \frac{1}{2})$, atunci $-1 < -\sqrt{\frac{3-6y}{5y-2}} < 0$.

121. Să se verifice că funcţia $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, este surjectivă.

122. Să se determine m astfel ca funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1-m, & x \leq 0 \\ -x^2+2mx-6, & x > 0 \end{cases}$$

să fie surjectivă.

R. $m \geq 2$.

123. Fie $f:\mathbb{R}\to(-\infty,0)$, $f(x) = \min\{x, -x^2\}$. Să se precizeze dacă funcţia este sau nu surjectivă.

Scanned with OKEN Scanner

R. da.

124. Cu ajutorul reprezentării grafice să se spună care din funcţiile următoare sînt surjective şi care nu sînt surjective.

$f_1:[-1,4]\to[0,7]$, $f_1(x) = x + 1$

$f_2:[-2,4]\to[-2,0]$, $f_2(x) = -\frac{1}{2}|2-x|$

$f_3:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{1}{2}\log_2 x^2$

$f_4:[0,\infty)\to\{0,1,2,3,\ldots\}$, $f_4(x) = [x]$ (partea întreagă a lui x)

$f_5:\{0,1,2,3\}\to\{0,-1,3\}$, $f_5(x) = x^2 - 4x + 3$

R. f_1 nu este surjectivă; f_2, f_3, f_4, f_5 sînt surjective.

125. Fie funcţiile $f:[0,4]\to[0,2]$, $f(x) = \min(x,4-x)$ şi $g:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$, $g(x) = \max(x+1,1-x)$. Să se arate că funcţia f este surjectivă, iar funcţia g nu este surjectivă.

126. Se consideră funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^3+x+1$. Să se arate că funcţia g este bijectivă.

Soluţie Din egalitatea $g(x_1) = g(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ rezultă $x_1^3 + x_1 + 1 = x_2^3 + x_2 + 1 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) = 0$. Deoarece: $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 > 0$, considerîndu-l ca trinom de gradul II cu $\Delta < 0$, rezultă $x_1 - x_2 = 0$, deci $x_1 = x_2$, adică funcţia g este injectivă. Deoarece pentru $\forall\, y\in\mathbb{R}$, ecuaţia $x^3+x+1 = y$ admite cel puţin o rădăcină reală, rezultă că funcţia g este surjectivă. Deci g este bijectivă.

127. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de legea $f(x) = ax^{2k+1} + b$, unde $k\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}-\{0\}$, $b\in\mathbb{R}$.

Să se arate că funcţia f este bijectivă.

Soluţie Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1^{2k+1} + b = ax_2^{2k+1} + b \Rightarrow x_1^{2k+1} = x_2^{2k+1} \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^{2k} + \ldots + x_2^{2k}) = 0$ şi deoarece a doua paranteză este strict pozitivă dacă $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, rezultă că $x_1 = x_2$. Avem ($\forall\, y\in\mathbb{R}$), ($\exists$ un singur $x = \sqrt[2k+1]{\frac{y-b}{a}} \in \mathbb{R}$), astfel încît $y = f(x)$, deci funcţia f este bijecţie.

Scanned with OKEN Scanner

128. Să se arate că funcția $f:[0,1]\to[0,1]$ dată de legea $f(x) = \frac{(x+1)(x+a)}{x^2+1}$ este bijecție.

Soluție Dacă f este definită pe [0,1] cu valori pe [0,1], atunci f(0) și f(1) trebuie să fie incluse în [0,1]. Dar $f(0) = a$ și $f(1) = a + 1$. Scriind că $a \in [0,1]$ și $a+1 \in [0,1]$, rezultă $a = 0$. Deci $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$ și f duce pe $x = 0$ în 0 și pe $x = 1$ în 1.

Să arătăm în continuare că f are și proprietatea: $\forall\, y \in [0,1]$, $\exists\, x \in [0,1]$ astfel încît $\frac{x^2+x}{x^2+1} = y$. Această ecuație se mai scrie $g(x) = (y-1)x^2-x+y = 0$ și deoarece $g(0)\cdot g(1) = y(y-1-1+y) = 2y(y-1) < 0$, rezultă că aceasta are o rădăcină $x \in [0,1]$. Cu aceasta am arătat caracterul surjectiv al funcției f.

Să arătăm că f este și injectivă. Fie $\frac{x_1^2+x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2^2+x_2}{x_2^2+1}$. De aici deducem relația $(x_1+x_2-x_1x_2+1)(x_1-x_2) = 0$, care ne dă în mod necesar $x_1 = x_2$. Într-adevăr, primul factor e diferit de zero, întrucît el se scrie sub forma $x_1(1-x_2)+x_2+1$ și se constată că el nu se anulează cînd x_1 și x_2 variază în [0,1].

Deci f este și injectivă, prin urmare f este bijectivă.

129. Fie aplicația $r:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{1\}$ definită prin $r(x) = \frac{x-1}{x}$.

Să se arate că aplicația r este bijectivă.

Soluție Pentru $\forall\, y \in \mathbb{R}-\{1\}$, ecuația $\frac{x-1}{x} = y$, adică ecuația $x(1-y) = 1$ are o soluție unică $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ și anume $x = \frac{1}{1-y} \neq 0$. Prin urmare aplicația r este bijectivă.

130. Fie o funcție $f:[0,1]\to[\frac{\Pi}{4},0]$ pentru care $f(\sin t) = t^2 - \pi t$, $\forall\, t\in[\frac{\Pi}{2},\pi]$

Să se arate că f este bijectivă.

Soluție Funcția $\sin(\pi-t) = x$ este inversabilă și atunci $\pi-t =$

Scanned with OKEN Scanner

arcsin x, de unde găsim $t = \pi - \arcsin x$. Rezultă că $f(\sin t) = f(\sin(\pi - t)) = f(x) = (\pi - \arcsin x)^2 - \pi(\pi - \arcsin x) = (\arcsin x)^2 - \pi \cdot \arcsin x$. Funcţia f este o funcţie compusă $f = g \circ h$ unde $h(x) = \arcsin x$, $h:[0,1] \to [0, \frac{\Pi}{2}]$ este o funcţie bijectivă şi $g(x) = x^2 - \pi x$, $g:[0, \frac{\Pi}{2}] \to [-\frac{\Pi^2}{4}, 0]$ care este tot o funcţie bijectivă, de unde rezultă că şi f este tot o funcţie bijectivă.

131. Folosind graficele următoarelor funcţii să se precizeze care sînt bijective şi care nu sînt bijective.

a) $f:\{-1,0,1\} \to \{-1,0,1\}$, $f(x) = -x$

b) $f:[0,4] \to [0,2]$, $f(x) = \min(x, 4-x)$

c) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f:(0,1] \cup [2, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$

R. a) injectivă; b) surjectivă, dar nu injectivă, deci nu este bijectivă; c) surjectivă, dar nu injectivă; d) bijectivă.

132. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2mx - 1, & x \le 1 \\ -x^2 + 2x + m^2 + m - 7, & x > 1 \end{cases}$$ să fie bijectivă.

R. $m = -2$.

133. Considerăm funcţia $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită astfel:

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{dacă } n \text{ este număr par} \\ n-1, & \text{dacă } n \text{ este număr impar} \end{cases}$$ Arătaţi că f este o bijecţie.

II.4. COMPUNEREA ŞI INVERSAREA FUNCŢIILOR

134. Fie date funcţiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şi $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x$.

Să se formeze $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

Soluţie

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2}$.

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (f(x))^2 = (x^2)^2 = x^4$.

Scanned with OKEN Scanner

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{2^x}$.

135. Să se formeze f o g, g o f, f o f și g o g în cazul următoarelor funcții:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 1-x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$
$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = x^2.$$

Soluție $f(g(x)) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } g(x) \geq 0 \\ 1-g(x), & \text{dacă } g(x) < 0 \end{cases}$

Însă deoarece $g(x) \geq 0$, rezultă $f(g(x)) = g(x) = x^2$.

Mai departe: $g(f(x)) = (f(x))^2$

Dacă $x \geq 0$, $f(x) = x$, $(f(x))^2 = x^2$ și $g(f(x)) = x^2$.

Dacă $x < 0$, $f(x) = 1-x$, $g(f(x)) = (1-x)^2$.

În concluzie, $g(f(x)) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geq 0 \\ (1-x)^2, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

De asemenea, $f(f(x)) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geq 0 \\ 1-f(x), & \text{dacă } f(x) < 0 \end{cases}$

Însă $f(x) \geq 0$ pentru orice x și deci

$$f(f(x)) = f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 1-x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

În sfîrșit, $g(g(x)) = (g(x))^2 = (x^2)^2 = x^4$.

136. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to[\frac{7}{4},\infty)$, $f(x) = x^2+x+2$. Să se compună funcția f cu funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x+1$.

Soluție

$f \circ g:\mathbb{R}\to[\frac{7}{4},\infty)$, $f(g(x)) = (g(x))^2 + g(x) + 2 = (x+1)^2 + (x+1) + 2 = x^2 + 3x + 4$, deci $(f \circ g)(x) = x^3 + 3x + 4$.

137. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $f(x) = 3x+1$ și $g(x) = x+3$. Să se rezolve ecuația: $(g \circ f \circ f)(x) = (f \circ g \circ g)(x)$.

Soluție

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3(3x+1) + 1 = 9x + 4$.

$(g \circ f \circ f)(x) = g(f(f(x))) = g(9x+4) = (9x+4) + 3 = 9x + 7$.

Pe de altă parte: $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x+3) + 3 = x + 6$.

$(f \circ g \circ g)(x) = f(g(g(x))) = f(x+6) = 3(x+6) + 1 = 3x + 19$.

Ecuația din enunț devine: $9x + 7 = 3x + 19$ cu soluția $x = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

138. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ și $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$

Să se determine $f \circ g$ și $g \circ f$.

Soluție $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = \begin{cases} n, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$

$(g \circ f)(n) = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

139. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x<0 \\ x^2+3, & x\geq 0 \end{cases}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x+1$.

Să se determine $f \circ g$ și $g \circ f$.

Soluție

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2x+5, & x<-1 \\ x^2+2x+4, & x\geq -1 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2x+4, & x<0 \\ x^2+4, & x\geq 0 \end{cases}$$

140. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x\leq 0 \\ -x, & x>0 \end{cases}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = -x^2$.

Să se demonstreze că : $f \circ g = g$, $g \circ f = g$, $f \circ f = f$.

Soluție Deoarece $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = (-\infty,0] \subset \mathbb{R}$, există funcțiile $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$. Avem $f(g(x)) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } g(x)\leq 0 \\ -g(x), & \text{dacă } g(x)>0 \end{cases}$ și cum $g(x) \leq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Rezultă $f(g(x)) = g(x) = x^2$, deci $f \circ g = g$.

De asemenea, avem:

$g(f(x)) = -f^2(x)$; dacă $x \leq 0$, atunci $f(x) = x$.

$g(f(x)) = -x^2$; dacă $x > 0$, atunci $f(x) = -x$.

$g(f(x)) = -x^2$ și deci $g(f(x)) = -x^2$, $g \circ f = g$.

Compunînd f cu f obținem: $f(f(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x)\leq 0 \\ -f(x), & f(x)>0 \end{cases}$ și deoarece $f(x) \leq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, avem $f(f(x)) = f(x)$, adică $f \circ f = f$.

141. Fie $E = \{-1,0,1,2\}$, $F = \{-2,0,3\}$ și funcțiile:

$f:E\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 2$

$g:F\to\mathbb{R}$, $g(x) = x - 1$

Pot fi definite funcțiile compuse $f \circ g$, $g \circ f$? În caz afirmativ să se determine aceste funcții.

Soluție

Scanned with OKEN Scanner

$f(E) = \{f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = \{-2,0\}$

$g(F) = \{g(-2), g(0), g(3)\} = \{-3,-1,2\}$

Deoarece $f(E) \subset F$, există $g \circ f$; fiindcă $g(F) \not\subset E$, nu se poate defini $f \circ g$. Avem deci $g \circ f: E \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 1 = x^2 - x - 3$.

Ilustrăm compunerea lui g cu f prin diagrama care urmează:

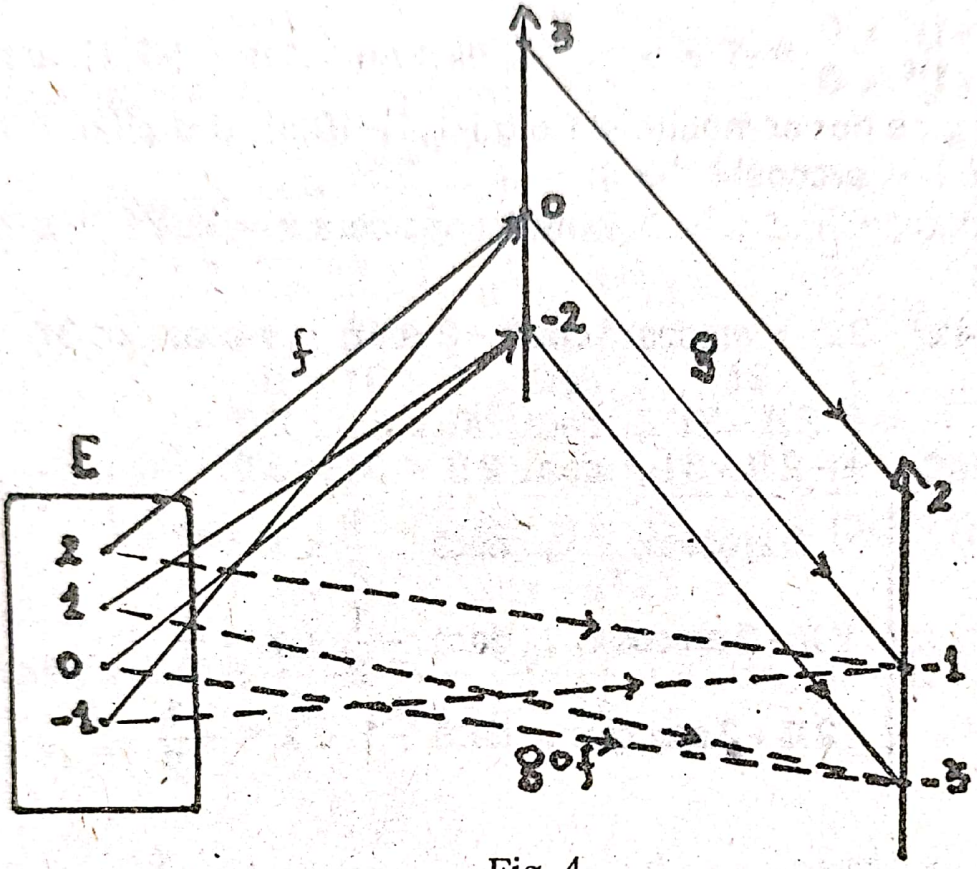


Fig. 4.

142. Fie aplicaţiile: $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g: \mathbb{R} \to [-1,1]$,

$g(x) = \sin\frac{x}{1+x^4}$.

Să se calculeze $g \circ f$.

Soluţie $g \circ f: \mathbb{R}-\{0\} \to [-1,1]$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin\frac{f(x)}{1+f[(x)]^4} = \sin\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^4}} = \sin\frac{x^3}{1+x^4}$$

143. Se dau funcţiile $f: [-1,1] \to [0,\pi]$, $f(x) = \arccos x$ şi $g: [-1,1] \to E$, $g(x) = 4x^3 - 3x$, unde $E = g([-1,1])$.

a) Să se arate că se pot compune funcţiile f cu g şi să se

Scanned with OKEN Scanner

determine f o g.

b) Să se determine toate numerele x pentru care este adevărată egalitatea $(f \circ g)(x) = 3 \cdot \arccos x$.

Soluţie

a) Avem $-1 \le 4x^3 - 3x \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 3x + 1 \ge 0 \\ 4x^3 - 3x - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (x+1)(2x-1)^2 \ge 0 \\ (x-1)(2x+1)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$ şi deci $g([-1,1]) = [-1,1]$, astfel că funcţiile f şi g se pot compune şi $f \circ g:[-1,1] \to [0,\pi]$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \arccos g(x) = \arccos(4x^3-3x)$.

b) Deoarece $-1 \le x \le 1$, putem considera $x = \cos t$, $0 \le t \le \pi$. În acest caz

$$\arccos(4x^3 - 3x) = \arccos(4\cos^3 t - 3\cos t) = \arccos(\cos 3t) =$$

$$= \begin{cases} 3t, & \text{dacă } 0 \le 3t \le \Pi \\ 2\Pi - 3t, & \text{dacă } \Pi \le 3t \le 2\Pi \\ -2\Pi + 3t, & \text{dacă } 2\Pi < 3t \le 3\Pi \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 3\arccos x, & \text{dacă } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 2\Pi - 3\arccos x, & \text{dacă } -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \\ -2\Pi + 3\arccos x, & \text{dacă } -1 \le x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

deci $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2\Pi + 3\arccos x, & \text{dacă } -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ 2\Pi - 3\arccos x, & \text{dacă } -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \\ 3\arccos x, & \text{dacă } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

egalitatea din enunţ fiind adevărată pentru $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

144. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date de $f(x) = x^2 + x + 2$ şi $g(x) = x^2 - x + 2$. Să se arate că nu există nici o funcţie $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încît să avem: $(h \circ f)(x) + (h \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Soluţie Relaţia din enunţ se mai poate scrie: $h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x))$, sau $h(x^2+x+2) + h(x^2-x+2) = (x^2+x+2)^2 - (x^2+x+2) + 2$.

Presupunem prin absurd că există o funcţie $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface relaţia dată. Pentru $x = 1$, respectiv $x = -1$ avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$h(4) + h(2) = 16 - 4 + 2 \Leftrightarrow h(4) + h(2) = 14,$$
$$h(2) + h(4) = 4 - 2 + 2 \Leftrightarrow h(2) + h(4) = 4.$$

Din ultimile 2 egalități rezultă că $h(4) + h(2) \neq h(2) + h(4)$, rezultat absurd. Deci nu există o funcție h care să satisfacă relația dată.

145. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația în x: $f[f(f(x))] = x$, unde $f(x) = \frac{ax+1}{x+a}$, $a \in \mathbb{R}$.

Soluție

$$f(f(x)) = \frac{af(x)+1}{f(x)+a} = \frac{a\frac{ax+1}{x+a}+1}{\frac{ax+1}{x+a}+a} = \frac{a^2x+a+x+a}{ax+1+ax+a^2} = \frac{(a^2+1)x+2a}{2ax+a^2+1}$$

$$f[f(f(x))] = f\left(\frac{(a^2+1)x+2a}{2ax+a^2+1}\right) = \frac{a\frac{(a^2+1)x+2a}{2ax+a^2+1}+1}{\frac{(a^2+1)x+2a}{2ax+a^2+1}+a} = \frac{(a^3+3a)x+3a^2+1}{(3a^2+1)x+a^3+3a}$$

deci ecuația devine $\frac{(a^3+3a)x+3a^2+1}{(3a^2+1)x+a^3+3a} = x$, sau $x^2 = 1$, cu soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$.

146. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $f(x) = \begin{cases} 4+x, & \text{pentru } x \leq 0 \\ 4-x, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$.

Să se determine f o f.

R.

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} 8+x, & \text{pentru } x \leq -4 \\ -x, & \text{pentru } -4 < x \leq 0 \\ x, & \text{pentru } 0 < x < 4 \\ 8-x, & \text{pentru } x \geq 4 \end{cases}$$

147. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, date de legile $f(x) = 2x^2-1$ și $g(x) = 4x^3-3x$. Să se verifice $f \circ g = g \circ f$. În general, compunerea nu este comutativă.

148. Fie aplicațiile următoare ale lui $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $f(x) = x+1$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x-1$.

a) să se determine aplicațiile compuse: $k = g \circ f$ și $l = h \circ g$.

b) Să se determine aplicațiile compuse: $u = h \circ (g \circ f)$ și

Scanned with OKEN Scanner

v = (h o g) o f.

R. a) $k(x) = (x+1)^3$; $l(x) = x^3-1$, $k,l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

b) $u(x) = (x+1)^3-1$; $v(x) = (x+1)^3-1$, $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

149. Se consideră funcțiile $f_1,f_2,f_3: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, date de $f_1(x) = 2x^2-1$; $f_2(x) = 4x^3-3x$; $f_3(x) = 16x^5-20x^3+5x$.

Să se arate că $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$; $f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1$; $f_2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2$.

R. Se verifică prin calcul direct.

150. Pe mulțimile $E = \{1,2,3,4\}$, $F = \{a,b,c,d\}$ și aplicațiile $f:E\to F$, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$ și $g:F\to E$, $g(a) = 2$, $g(b) = 4$, $g(c) = 3$, $g(d) = 1$.

a) Să se determine f^{-1}, g^{-1}, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ și apoi să se compare $(g \circ f)^{-1}$ cu $f^{-1} \circ g^{-1}$.

b) Să se demonstreze că dacă funcțiile $f:E\to F$, $g:F\to G$ admit inverse, atunci $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Soluție

a) Funcțiile f și g fiind bijective admit inverse, anume:

$f^{-1}:F\to E$, $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$, $f^{-1}(c) = 3$, $f^{-1}(d) = 4$

$g^{-1}:E\to F$, $g^{-1}(2) = a$, $g^{-1}(4) = b$, $g^{-1}(1) = d$, $g^{-1}(3) = c$

De asemenea avem: $h = g \circ f:E\to F$, $h(1) = 2$, $h(2) = 4$, $h(3) = 3$, $h(4) = 1$ și deoarece h este bijectivă, ea admite reciprocă, anume:

$h^{-1} = (g \circ f)^{-1}:E\to E$, $h^{-1}(1) = 4$, $h^{-1}(2) = 1$, $h^{-1}(3) = 3$, $h^{-1}(4) = 2$

Compunînd f^{-1} cu g^{-1}, obținem $S = f^{-1} \circ g^{-1}:E\to E$, $S(2) = 1$, $S(4) = 2$, $S(3) = 3$, $S(1) = 4$. Se observă că $h^{-1} = S$, adică $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

b) Dacă f și g admit inverse, atunci și compusa lor $g \circ f$ are inversă. Funcția $g \circ f$ aplică E pe G, iar $(g \circ f)^{-1}$ aplică G pe E; $f^{-1} \circ g^{-1}$ este tot o aplicație a mulțimii G pe mulțimea E.

Fie $z \in G$ și să notăm $g^{-1}(z) = y \in F$, iar $f^{-1}(y) = x \in E$.

Avem: $(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

adică $(g \circ f)^{-1}(z) = x$ și $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Observație: Relația din b) este adevărată în cazul general.

151. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2-9$, admite restricții inversabile diferite pe: a) $[0,+\infty)$; b) $(-\infty,0]$; c) $(-3,0] \cup [3,+\infty)$.

Să se determine inversele acestor funcții.

Soluție

Scanned with OKEN Scanner

a) Restricția f_1 a lui f la $[0,+\infty)$: $f_1:[0,+\infty)\to[-9,+\infty)$, $f_1(x) = x^2-9$ este bijectivă, deci inversabilă. Inversa ei este funcția $f_1^{-1}:[-9,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f_1(x) = \sqrt{x+9}$.

b) Restricția bijectivă a lui f la $(-\infty,0]$, este funcția f_2: $f_2:(-\infty,0]\to[-9,+\infty)$, $f_2(x) = x^2-9$, iar reciproca sa este $f_2^{-1}:[-9,+\infty)\to[-\infty,0)$, $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x+9}$.

c) Restricția f_3 a lui f la $(-3,0]\cup[3,+\infty)$: $f_3:(-3,0]\cup[3,+\infty)\to[-9,+\infty)$, $f_3(x) = x^2-9$ este bijectivă, deci inversabilă. Inversa este:

$$f_3^{-1}:[-9,+\infty)\to(-3,0]\cup[3,+\infty),\ f_3^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+9}, & \text{dacă } x\in[-9,0) \\ \sqrt{x+9}, & \text{dacă } x\in(0,+\infty) \end{cases}$$

152. Fie $A,B\subset\mathbb{R}$ două mulțimi și $f:A\to B$ o funcție bijectivă. Să se arate care este relația dintre f^{-1} și $(-f)^{-1}$.

Soluție Funcția f fiind bijectivă, rezultă că -f este bijectivă. Cum $-f:A\to -B$, avem: $(-f)^{-1}:-B\to A$; $(-f)(-f)^{-1} = (-y)$, $(\forall\ -y\in -B)$.

Deci $f\circ(-f)^{-1}(y) = y$, $(\forall\ y\in B)$ și deci $(-f)^{-1}(-y) = f^{-1}(y)$, $(\forall\ y\in B)$.

153. Fie funcția $f:\{1,2,3\}\to\{a,b,c\}$ reprezentată în diagrama din figura alăturată. Este inversabilă funcția f? In caz afirmativ să se reprezinte diagrama corespunzătoare funcției f^{-1}.

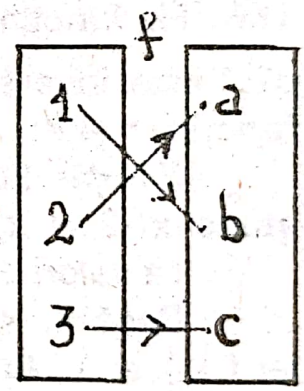


Fig. 5.

Soluție Funcția f este bijectivă și deci inversabilă, $f^{-1}:\{a,b,c\}\to\{1,2,3\}$ și are diagrama de mai jos:

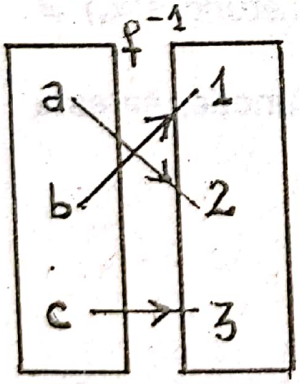


Fig. 6.

154. Se dă funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^2-6x+11, & x\in[3,\infty) \\ x-1, & x\in(-\infty,3) \end{cases}.$$

Să se arate că funcția f este bijectivă și să se determine inversa sa.

Soluție Dacă $x\in(-\infty,3)$, atunci $f(x) = x-1$ este strict crescătoare și ia toate valorile cuprinse între $-\infty$ și 2.

Dacă $x\in[3,+\infty)$, atunci $f(x) = x^2-6x+11 = (x-3)^2+2$ este deasemenea strict crescătoare și deoarece $f(3) = 2$, vom avea $f(x) > 2$ pentru $x > 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta că în intervalul $(3,+\infty)$ funcţia f ia toate valorile cuprinse între 2 şi ∞.

Fie $b \in (2,\infty)$. Ecuaţia $x^2-6x+11 = b$ admite pentru $x > 3$ soluţia reală $x = 3+\sqrt{b-2}$, $(b > 2)$. Analog se arată că în intervalul $(-\infty,3)$, funcţia ia toate valorile cuprinse între $-\infty$ şi 2. Funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este bijectivă şi admite ca inversă funcţia $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită în modul următor:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty,-2) \\ 3+\sqrt{b-2}, & x \in [2,\infty) \end{cases}.$$

155. Fie funcţia $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}-\{-1\}$. Să se arate că funcţia admite o inversă şi să se determine inversa ştiind că $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

R. f este bijectivă, deci admite inversă funcţia:

$$f^{-1}:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}-\{-1\},\ f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

156. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{dacă } x \in (-\infty,3) \\ 2x-5, & \text{dacă } x \in [3,+\infty) \end{cases}$. Să se arate că f este inversabilă şi să se afle inversa sa. Să se reprezinte grafic funcţiile f şi f^{-1}.

Soluţie Funcţia f este injectivă. Dacă $x_1 < 3$, $x_2 < 3$ şi $x_1 \neq x_2$, atunci $x_1-2 \neq x_2-2$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$.

La valori diferite din $[3,+\infty)$ corespund valori diferite ale funcţiei.

Dacă $x_1 < 3$ şi $x_2 \leq 3$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$, deoarece $f(x_1) < 1$ iar $f(x_2) \geq 1$. Am arătat că dacă $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$, adică funcţia este injectivă.

Deoarece orice număr real este o valoare pentru funcţie, ea este şi surjectivă, deci bijectivă.

Inversa funcţiei f este funcţia:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \begin{cases} x-2, & \text{dacă } x \in (-\infty,1) \\ \frac{1}{2}(x+5), & \text{dacă } x \in [1,+\infty) \end{cases}$$

Grafic, sînt două funcţii reprezentate în figura alăturată şi sînt simetrice faţă de prima bisectoare.

Scanned with OKEN Scanner

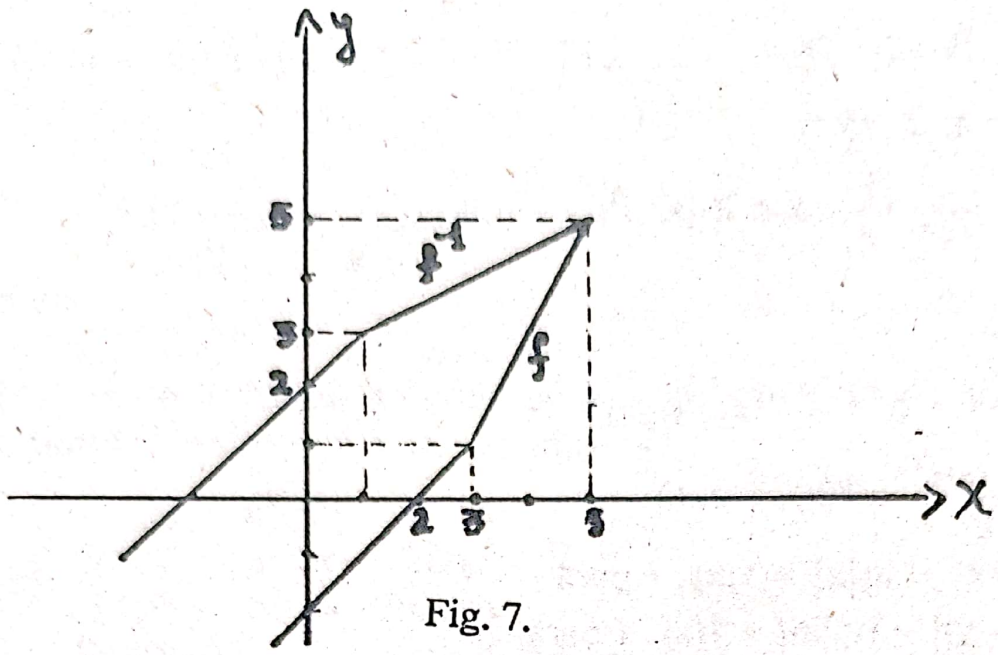


Fig. 7.

157. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{dacă } x \le 4 \\ 2x-7, & \text{dacă } x > 4 \end{cases}$.
Să se arate că f este inversabilă și să se calculeze f^{-1}.

R. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+3, & \text{dacă } x \le 1 \\ \dfrac{x+7}{2}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

158. Să se arate că funcția $f:[0,1]\to[0,1]$,

$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 1-x, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$ este bijectivă.
Să se afle inversa lui f.

R. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 1-x, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$

II.5. FUNCȚII PARE ȘI FUNCȚII IMPARE

159. Să se studieze paritatea funcțiilor definite prin:

a) $f(x) = 3^{2|x|}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$

c) $f(x) = \lg|x|$, $x \in \mathbb{R}$

Scanned with OKEN Scanner

d) $f(x) = |\operatorname{tg}|x||$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

e) $f(x) = \arccos(\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$

f) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x^2-4|}$, $x \in \mathbb{R}-\{-2,2\}$

g) $f(x) = x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

Soluție

a) $f(-x) = 3^{2|-x|} = 3^{2|x|} = f(x)$, f pară

b) $f(-x) = \frac{a^{-x}+a^x}{2} = f(x)$, f pară

c) $f(-x) = \lg|-x| = \lg|x| = f(x)$, f pară

d) $f(-x) = |\operatorname{tg}|-x|| = |\operatorname{tg}|x|| = f(x)$, f pară

e) $f(-x) = \arccos[\cos(-x)] = \arccos(\cos x) = f(x)$, f pară

f) $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{|(-x)^2-4|} = \frac{x^2-1}{|x^2-4|} = f(x)$, f pară

g) $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$, f nu este pară.

160. Să se stabilească imparitatea funcțiilor definite prin:

a) $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

b) $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \arcsin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{|x|}$, $x \neq 0$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

e) $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Soluție

a) $f(-x) = a(-x) = -ax = -f(x)$, f impară

b) $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$, f impară

c) $f(-x) = \arcsin[\sin(-x)] = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x) = -f(x)$, f impară.

Dacă se observă că $\arcsin(\sin x) = x$, rezultatul se obține imediat.

d) $f(-x) = \frac{\operatorname{arctg}(-x)}{|-x|} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{|x|} = -f(x)$, f impară

Scanned with OKEN Scanner

e)
$$f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+x) = \ln\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x} =$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = -\ln(\sqrt{1+x^2}-x) = -f(x)$$

f impară.

161. Să se arate că funcțiile de mai jos, definite pe domeniul lor de existență, nu sînt nici pare nici impare.

a) $f(x) = e^{x^2+x}$
b) $f(x) = \sin x + 2\cos x$
c) $f(x) = 3\operatorname{tg} x - 5\cos x$

Soluție

a) $f(-x) = e^{(-x)^2-x} = e^{x^2-x} \neq f(x)$

$e^{x^2-x} \neq -f(x)$, f nu este nici pară nici impară.

b) $f(-x) = \sin(-x) + 2\cos(-x) = -\sin x + 2\cos x \neq f(x)$

$f(-x) \neq -f(x)$, f nu este nici pară nici impară.

c) $f(-x) = 3\operatorname{tg}(-x) - 5\cos(-x) = -3\operatorname{tg} x - 5\cos x \neq f(x)$

$f(-x) \neq -f(x)$, f nu este nici pară nici impară.

162. Să se arate că orice funcție $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, poate fi scrisă ca sumă de două funcții, dintre care una este pară și alta impară.

Soluție Fie funcțiile $\varphi:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ și $\psi:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Evident avem $\varphi(x) + \psi(x) = f(x)$.

Dacă x trece în -x avem:

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \varphi(x) \text{ și } \psi(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\psi(x).$$

Deci funcția f(x) se poate scrie ca suma dintre o funcție $\varphi(x)$ pară și o funcție $\psi(x)$ impară.

163. Aplicîndu-se rezultatul precedent să se arate că funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ se poate scrie ca sumă dintre o funcție pară și una impară.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

$$h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{2x}{1-x^2}.$$

Se verifică ușor că g(x) este o funcție pară, iar h(x) este o funcție impară.

164. Să se arate că dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție simetrică în raport cu fiecare punct $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci f este constantă.

Soluție Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$, două puncte fixe și $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Atunci $f(x_1) = f(x_0 - \frac{x_2 - x_1}{2}) = f(x_0 + \frac{x_2 - x_1}{2}) = f(x_2)$, deci f este constantă.

165. a) O funcție rațională R este pară $\Leftrightarrow$ există un cît de funcții polinomiale R_1 astfel încît $R(x) = R_1(x^2)$, $(\forall\, x \in D_R)$.

b) O funcție rațională R este impară $\Leftrightarrow$ există o funcție rațională R_1 astfel încît $R(x) = x \cdot R_1(x)$, $(\forall\, x \in D_R)$.

Soluție Implicația ($\Leftarrow$) pentru a) și b) este evidentă. Pentru implicația ($\Rightarrow$) considerăm un polinom de grad par de forma: $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n = 2k$. Atunci $P(-x) = P(x)$, $(\forall\, x \in \mathbb{R})$ și

$$P(x) = \frac{1}{2}[P(x) + P(-x)] = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k\right) =$$

$$= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots + a_{2h}x^{2h} + \ldots = P_1(x^2)$$

unde P_1 este un polinom. Fie acum $R = \frac{P}{Q}$, P, Q polinoame. Dacă R este pară, adică $R(x) = R(-x)$, $(\forall\, x \in D_R)$, atunci

$$R(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{P(-x)}{Q(-x)}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{P(x)\cdot Q(-x) + P(-x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot Q(-x)}$$

unde evident numitorul și numărătorul sînt polinoame pare.

Din cele arătate mai sus există două polinoame astfel încît $P(x)\cdot Q(-x) + P(-x)\cdot Q(x) = P_1(x^2)$; $Q(x)\cdot Q(-x) = Q_1(x^2)$, $(\forall\, x \in \mathbb{R})$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare $R(x) = R_1(x^2)$, $(\forall\, x \in D_R)$ unde $R_1 = \frac{P_1}{2Q_1}$.

Să presupunem că R este o funcție rațională impară. Atunci funcția rațională $x \mapsto \frac{R(x)}{x}$ este evident pară, deci există R_1 o funcție rațională astfel încît $\frac{R(x)}{x} = R_1(x^2)$ $(\forall \in D_R) - \{0\}$.. Deoarece R impară avem $0 \in D_R$ și $R(0) = 0$ sau $0 \notin D_R$.

Prin urmare $R(x) = x \cdot R_1(x)$, $(\forall\, x \in D_R)$.

166. Să se cerceteze dacă următoarea funcție $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + x^2$ este pară.

Soluție Deoarece:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+x^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = \frac{1}{6}(2x^3+3x^2+x)$$

$$f(-x) = \frac{1}{6}(2x^3+3x^2+x) \neq f(x)$$

funcția f nu este nici pară nici impară.

II.6. PERIODICITATEA FUNCȚIILOR

167. Să se afle perioada principală a funcției $f(x) = 3\sin x + \sin 2x$.

Soluție I: $f(x+T) = 3\sin(x+T) + \sin 2(x+T) = 3\sin x + \sin 2x$.

Pentru $x = 0$ obținem $3\sin T + \sin 2T = 0$ sau $3\sin T + 2\sin T \cdot \cos T = 0 \Rightarrow \sin T(3+2\cos T) = 0$. Cum $3+2\cos T \neq 0 \Rightarrow \sin T = 0$, $T = k\pi$.

Pentru $x = \frac{\Pi}{2}$ obținem $f(\frac{\Pi}{2}) = 3\sin\frac{\Pi}{2} + \sin\Pi = 3$

$$f(\tfrac{\Pi}{2}+\Pi) = 3\sin(\tfrac{\Pi}{2}+\Pi) + \sin 2(\tfrac{\Pi}{2}+\Pi) = 3\sin\tfrac{3\Pi}{2} + \sin 3\Pi = -3$$

Deoarece $f(x+\pi) \neq f(x)$, rezultă $k \neq 1$.

Pentru $k = 2$, adică $T = \pi$, avem: $3\sin(x+\pi) + \sin 2(x+\pi) = 3\sin x + \sin 2x$, deci $T = \pi$, perioada principală.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie II: Funcţia sinx are perioada π, iar funcţia sin2x are perioada π. Cel mai mic multiplu comun este $T = \pi$.

168. Să se studieze periodicitatea funcţiei: $f(x) = [x] + [-x]$.

Soluţie: Constatăm că $[x+1] = [x]+1$ şi $[-x-1] = [-x]-1$.

$f(x+1) = [x+1] + [-x-1] = [x] + 1 + [-x] - 1 = [x] + [-x] = f(x)$, funcţia f are deci perioada 1.

169. Să se arate că funcţia f definită prin $f(x) = x - [x]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, are perioada $T = 1$.

Soluţie

$f(x+1) = x + 1 - [x+1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x] = f(x)$.

Nu există o perioadă mai mică pentru f. $\forall\, \varepsilon \in (0,1)$, avem:

$$f(0+\varepsilon) = 0 + \varepsilon - [0+\varepsilon] = \varepsilon - 0 = \varepsilon \neq f(0)$$

170. Studiaţi perioada funcţiei $f:[0,+\infty)\to[0,1]$,

$$f(x) = (-1)^{[x]}\left(x - 2\left[\frac{x}{2}\right] - 1\right) + 1.$$

R. $T = 2$.

171. Să se arate că funcţia $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x^2}{3}$ nu este periodică.

Soluţie $\operatorname{tg}\frac{x^2}{3} = \operatorname{tg}\frac{(x+T)^2}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{(x+T)^2}{3} = k\Pi$, $K \in Z$.

$-\frac{2xT}{3} - \frac{T^2}{3} = k\Pi$, $(\forall\, x \in \mathbb{R})$ relaţie absurdă pentru $x \neq 0$. Deci funcţia $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x^2}{3}$ nu este periodică.

172. Să se arate că dacă o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nu este injectivă şi există o funcţie $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încît $f(x+y) = g(f(x),y)$ $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$, atunci f este o funcţie periodică.

Soluţie Deoarece f nu este injectivă, rezultă că există $x_1 > x_2 \in \mathbb{R}$, astfel încît $f(x_1) = f(x_2)$. Deci $\forall\, x \in \mathbb{R}$, avem: $f(x_1+x) = g(f(x_1),x) = g(f(x_2),x) = f(x_2+x)$. Rezultă că $f(x_1+x) = f(x_2+x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Dacă în ultima egalitate obţinută punem $x = y - x_2$, obţinem: $f(x_1+y-x_2) = f(x_2+y-x_2) \Leftrightarrow f(x_1-x_2+y) = f(y)$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, şi cum $x_1 - x_2 > 0$, rezultă că f este o funcţie periodică de perioadă $T = x_1 - x_2$.

Scanned with OKEN Scanner

173. Să se afle perioada funcţiei $y = \sin 2x + 2\sin\frac{3}{2}x$.

Soluţie Notăm a_1 şi $a_2 = \frac{3}{2}$.

$T_1 = \frac{2\Pi}{a_1} = \Pi$; $T_1 = \frac{2\Pi}{a_2} = \frac{4\Pi}{3}$.

Cel mai mic multiplu comun al lui π şi $\frac{4\Pi}{3}$ este 4π, deci $T = 4\pi$.

174. Să se afle perioadele următoarelor funcţii:

a) $f(x) = 3\cos 7x$

b) $f(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{5x}{2} + \frac{\Pi}{3}\right)$

Soluţie

a) $f(x+T) = f(x) \Rightarrow 3\cos 7(x+T) = 3\cos 7x \Rightarrow \cos(7x+7T) = \cos 7x$. Notăm $7x = x'$ şi obţinem: $\cos(x'+7T) = \cos x'$. Deoarece funcţia cosx are perioada π rezultă că $7T = \pi \Leftrightarrow T = \frac{2\Pi}{7}$.

b) $\operatorname{ctg}\frac{x+T}{2} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{T}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Notăm $\frac{x}{2} = x'$ şi avem $\operatorname{ctg}\left(x' + \frac{T}{2}\right) = \operatorname{ctg} x'$; $\frac{T}{2} = \Pi \Leftrightarrow T = \pi$.

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left[\frac{5}{2}(x+T) + \frac{\Pi}{3}\right] = \operatorname{tg}\left(\frac{5x}{2} + \frac{\Pi}{3}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\left(x' + \frac{5\Pi}{2}\right) = \operatorname{tg} x' \Rightarrow \frac{5T}{2} = \Pi$ sau $T = \frac{2\Pi}{5}$.

175. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) Să se arate că dacă dreapta de ecuaţie $x = a$ este o axă de simetrie a graficului funcţiei f, atunci $\forall\, x \in \mathbb{R}$ este adevărată egalitatea $f(x) = f(2a-x)$.

b) Să se demonstreze că dacă graficul funcţiei f admite 2 axe de simetrie paralele cu axa ordonatelor, atunci funcţia este periodică. Să se verifice într-un caz particular.

Soluţie

a) Dreapta $x = a$ este o axă de simetrie a graficului funcţiei f dacă

Scanned with OKEN Scanner

$f(a-h) = f(a+h), \forall\, h > 0$

Fie $x \in \mathbb{R}$. Luăm $h = |x-a|$ și avem $f(a-|x-a|) = f(a+|x-a|)$ sau $f(x) = f(2a-x)$.

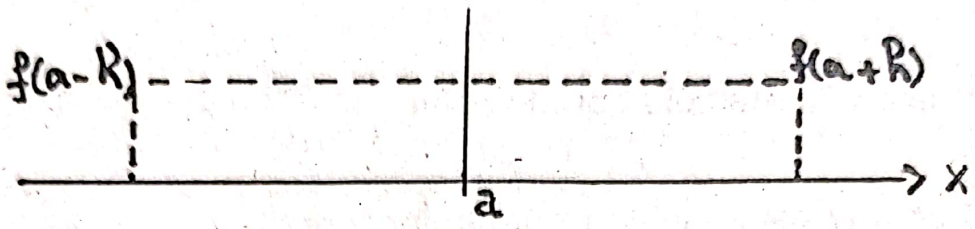


Fig. 8.

b) Fie $a \neq b$ și $x = a$, $x = b$ ecuațiile celor două axe de simetrie.

Deoarece $x=a$ este axă de simetrie a graficului lui f, avem: $f(x) = f(2a-x)$; $x = b \Rightarrow f(2a-x) = f[2b-(2a-x)]$, adică $f(2a-x) = f(x+2a-2b)$ și deci $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+2b-2a)$, adică f este periodică cu perioada $2(b-a)$.

Exemplu: Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, al cărei grafic are axele de simetrie $x = \frac{\Pi}{2}$, $x = \frac{3\Pi}{2}$ este periodică cu perioada $2\left(\frac{3\Pi}{2} - \frac{\Pi}{2}\right) = 2\Pi$.

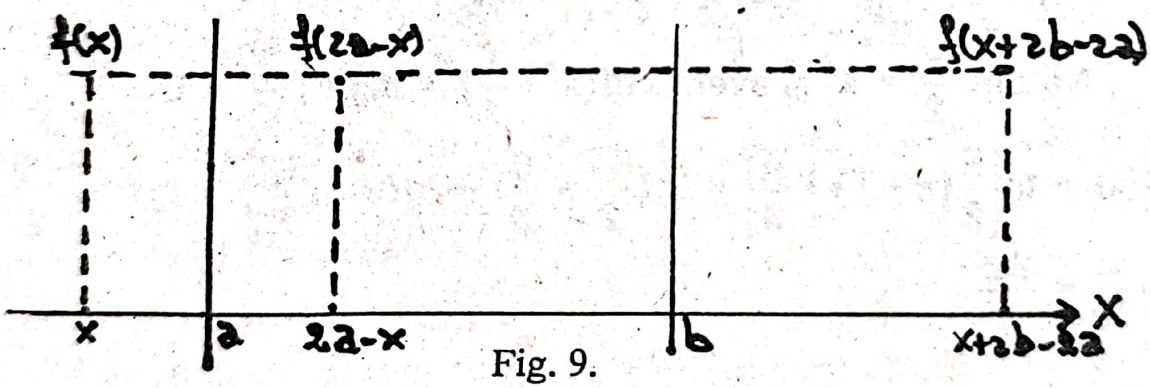


Fig. 9.

176. Să se arate că funcția $f(x) = \operatorname{tg}(\pi \cdot \cos \pi x)$ are perioada $T=2$.

Soluție $f(x+2) = \operatorname{tg}[\pi \cdot \cos\pi(x+2)] = \operatorname{tg}[\pi \cdot \cos(\pi x + \pi)] = \operatorname{tg}(\pi \cdot \cos\pi x) = f(x)$.

177. Să se studieze din punct de vedere al periodicității funcția $f(x) = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$.

Soluție Perioadele funcțiilor $\cos x$, $\cos 3x$, ..., $\cos(2n-1)x$ sînt

Scanned with OKEN Scanner

$T_1 = 2k_1\Pi$, $T_2 = \frac{2k_2\Pi}{3}$, ..., $T_2 = \frac{2k_n\Pi}{2n-1}$. Cel mai mic multiplu comun al acestor numere se obține pentru $2k_1\Pi = \frac{2k_2\Pi}{3} = \ldots = \frac{2k_n\Pi}{2n-1}$, adică $T = \pi$.

178. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{1\}$ o funcție cu proprietatea că dacă există $a \neq 0$ astfel încît $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, atunci f este periodică.

Soluție Dacă ar exista $x_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_0) = 0$, atunci $f(x_0+a) = 1$, ceea ce este absurd. Deci $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Avem:

$$f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)}$$

deci $f(x+4a) = f((x+2a)+a) = -\frac{1}{f(x+2a)} = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

În concluzie, $T = 4a$ este o perioadă a funcției f.

179. Să se reprezinte grafic funcția de perioadă 3, definită prin modelul $(0 \leq x < 3) \Rightarrow (f(x) = x)$.

Soluție

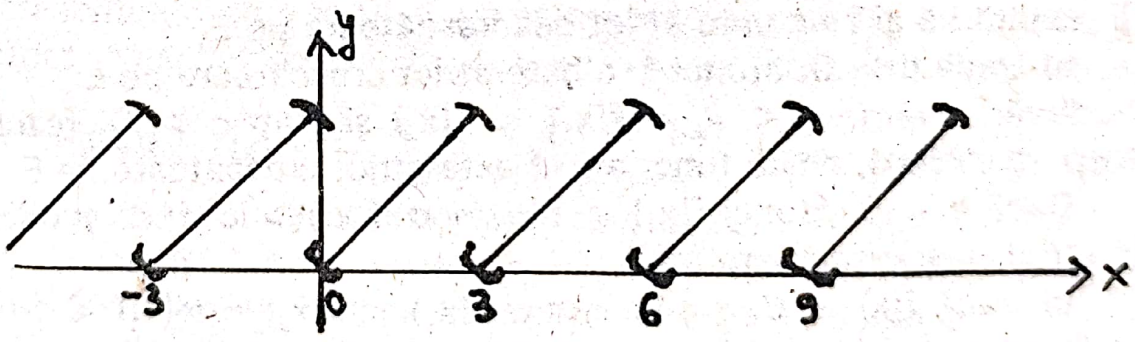


Fig. 10.

180. Fie f(x) o funcție cu valori reale astfel încît pentru $\forall\, x \in \mathbb{R}$ să avem $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-f^2(x)}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, a fixat.

Să se demonstreze că această funcție este o funcție periodică, adică $\exists\, b \in \mathbb{R}_+^*$ a.î. $f(x+b) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Soluție Se observă că $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta că f are perioada 2a:

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - f^2(x)} - f(x) + f^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2f(x)-1}{2}\right)^2} = f(x)$$

II.7. FUNCȚII MONOTONE

181. Fie funcția strict monotonă $f:E\to\mathbb{R}$. Să se studieze funcțiile următoare din punct de vedere al strictei monotonii.

a) $f + c$, c constantă

b) $f \cdot c$, c constantă nenulă

c) f^2

Soluție

a) Presupunem f strict crescătoare pe E. Deoarece $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ pentru $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, avem și $f(x_1)+c < f(x_2)+c$, adică $f+c$ este o funcție strict crescătoare pe E. Dacă f este strict descrescătoare pe E rezultă că și $f+c$ este strict descrescătoare pe E.

b) Dacă $c > 0$, atunci $f \cdot c$ este strict crescătoare pe E. Într-adevăr, avem $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ și cum $c > 0$, rezultă și $c \cdot f(x_1) < c \cdot f(x_2)$, adică funcția $c \cdot f$ este strict crescătoare pe E.

Dacă $c < 0$, atunci $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow c \cdot f(x_1) > c \cdot f(x_2)$ și deci $c \cdot f$ este strict descrescătoare pe E.

c) Dacă $f(x) \geq 0$, $x \in E$, atunci $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f^2(x_1) < f^2(x_2)$ și deci f^2 este strict crescătoare pe E; dacă $f(x) \leq 0$, $x \in E$, atunci $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f^2(x_1) > f^2(x_2)$ și deci f^2 este strict descrescătoare pe E.

Dacă f nu păstrează un semn constant pe E, f^2 nu este strict monotonă pe E.

182. Fie $f,g:I=[a,b]\to[a,b]$ două funcții cu proprietățile:

a) f strict crescătoare,

b) g strict descrescătoare,

c) $g < f$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se demonstreze că: $f \circ g > g \circ f$.

Soluție Deoarece f este strict crescătoare și $g(x) \geq a$, $\forall x \in I$. Avem $f(g(x)) \geq f(a)$, $\forall x \in I$. De asemenea, g strict descrescătoare și $f(x) \geq a$, $\forall x \in I$, implică $g(f(x)) \leq g(a)$, $\forall x \in I$. Cum $g(a) < f(a)$, rezultă că $g(f(x)) < f(a) \leq f(g(x))$, $\forall x \in I$, adică $g \circ f < f \circ g$.

183. Să se studieze monotonia funcției $f(x) = a^{b^x}$, $(a \geq 0, b > 0)$, în funcție de a și de b.

Soluție Deosebim cazurile

a) $a = 0, b = 1$, sau $a = 1, b = 1$ cînd $f(x)$ este constantă.

b) $0 < a < 1$ și $0 < b < 1$, funcția este monoton crescătoare: $f(x) \in [0,1)$.

c) $a > 1, b > 1$, funcția este tot monoton crescătoare: $f(x) \in (1,\infty)$.

d) $0 < a < 1$ și $b > 1$, funcția este monoton descrescătoare: $f(x) \in (1,0)$.

e) $a > 1, b < 1$, funcția $f(x)$ este tot monoton descrescătoare: $f(x) \in (-\infty,1)$.

Pentru $a = 0$, funcția este constant nulă.

184. Este adevărată propoziția: „Orice funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, strict crescătoare pe $(-\infty,0)$ și strict crescătoare pe $[0,\infty)$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$"?

Soluție Negația propoziției din enunț este: „$\exists$ o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, strict crescătoare pe $(-\infty,0)$ și strict crescătoare pe $[0,+\infty)$, care nu este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$". Negația este adevărată. Într-adevăr, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty,0) \\ x-2, & x \in [0,+\infty) \end{cases}$ este, evident, strict crescătoare pe $(-\infty,0)$ și strict crescătoare pe $[0,+\infty)$. Dacă $x_1 = -1$ și $x_2 = 0$, atunci $f(x_1) = -1$ și $f(x_2) = -2$. Cum $x_1 < x_2$ și $f(x_1) > f(x_2)$, rezultă că funcția f nu este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Negația propoziției din enunțul problemei fiind adevărată, propoziția dată este falsă.

185. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin relația:

$$f(x) = \left[\frac{(m^2-1)a+m}{ma^2+a+m-1}\right]^x, \quad a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}.$$

a) Să se determine m astfel încît funcția să fie definită pe $\mathbb{R}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru m astfel determinat să se studieze monotonia funcției.

Soluție

a) Avînd o funcție exponențială, vom pune deci condiția:

$$\frac{(m^2-1)a+m}{ma^2+a+m-1} > 0,\ \forall\ a \in \mathbb{R}.$$

Ecuația de gradul I în necunoscuta a: $(m^2-1)a + m = 0$, nu trebuie să aibă soluție pentru nici un $a \in \mathbb{R}$, deci $m^2-1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

De asemenea ecuația: $ma^2 + a + m - 1 = 0$ nu trebuie să aibă soluții reale, deci: $\Delta = 1-4m(m-1) < 0$.

Ținînd seama de aceste condiții obținem $m = -1$, caz în care funcția devine: $f(x) = \left[\frac{1}{a^2-a+2}\right]^x$.

b) Pentru a studia monotonia funcției exponențiale, vom compara baza cu unitatea: $\frac{1}{a^2-a+2} - 1 = \frac{-a^2+a-1}{a^2-a+2} < 0,\ \forall\ a \in \mathbb{R}$. Deci $0 < \frac{1}{a^2-a+2} < 1,\ \forall\ a \in \mathbb{R}$. Rezultă că pentru $m = -1$, funcția definită pe $\mathbb{R}$ este strict descrescătoare oricare ar fi parametrul real a.

186. Se dă duncția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 0 \\ ax^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$ cu a și b reali.

Să se determine mulțimile pe care le parcurg a și b astfel ca funcția f să fie strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

R. Pentru ca funcția f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ trebuie să avem $f(a) > f(x),\ \forall\ x < 0 \Rightarrow b \in [1, +\infty)$. Dacă $a < 0$, f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru $b \in (-\infty, 1)$.

187. Ce condiții trebuie să îndeplinească coeficienții reali a, b, c, d, (a și c nenuli), pentru ca funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $g(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 0 \\ cx+d, & x \geq 0 \end{cases}$ să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

R. Pentru ca g(x) să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, trebuie să avem $a > 0$, $c > 0$ și $b \leq d$.

188. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $g(x) = \begin{cases} nx, & x < 1 \\ mx, & x \geq 1 \end{cases}$. Să se studieze monotonia funcției după valorile

Scanned with OKEN Scanner

lui m și n.

R. Există mai multe cazuri de considerat:

a) $m > n \geq 0$, g este strict crescătoare;

b) $0 \leq m < n$, g nu este monotonă deoarece există $x_1 < x_2$ pentru care $f(x_1) \cdot f(x_2)$ este pozitiv sau negativ;

c) $m < n \leq 0$, g este strict descrescătoare;

d) $0 \geq m > n$, g nu este monotonă;

e) $m = n$, g este strict monotonă (graficul lui g este o dreaptă; g crescătoare sau descrescătoare după cum n este pozitiv sau negativ).

II.8. FUNCȚII MĂRGINITE

189. Să se arate că următoarele funcții sînt mărginite

a) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $x \in [-10, 10]$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție

a) Funcția $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ este mărginită, deoarece $\left|\sqrt{100 - x^2}\right| \leq 10$, ceea ce se vede și din graficul alăturat.

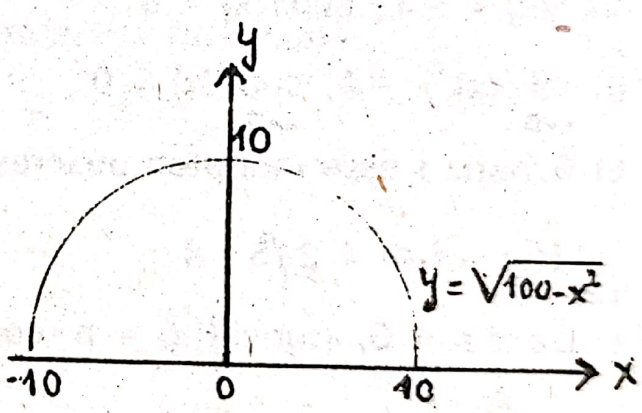


Fig. 11.

b) Punînd

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1},$$ avem

$$\left|1 - \frac{2}{x^2 + 1}\right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

190. Să se studieze marginea funcțiilor:

a) $f(x) = 2x^5$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Soluție

a) Funcția $f(x) = 2x^5$ este mărginită în orice interval închis întrucît $|f(x)| \leq M = 2a^5$. Funcția nu este mărginită pe intervalul $(-\infty, +\infty)$,

Scanned with OKEN Scanner

deoarece nu există un număr A astfel încît $|f(x)| \leq A$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Funcția $f(x) = \frac{1}{x^2}$ este mărginită în intervale de tipul $a \leq x < +\infty$ sau $-\infty < x \leq -a$, $a > 0$ și nemărginită în intervale de tipul $0 < x \leq b$ sau $-b \leq x < 0$, ceea ce se poate observa și grafic.

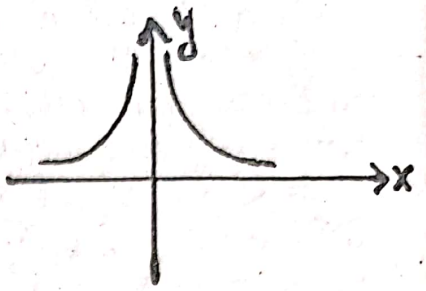


Fig. 12.

191. Să se determine marginile funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$ pe mulțimile D indicate:

a) $f(x) = 3x + 2$, $D = [-1,1]$.

b) $f(x) = -(x-1)^2$, $D = [0,3]$.

c) $f(x) = \sqrt{x^2+4} - x$, $D = [0,4]$.

d) $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ (a, b constante), $D = [0,\pi]$.

Soluție

a) Dacă $x \in [-1,1]$, atunci $3x \in [-3,3]$ și $3x+2 \in [-1,5]$; avem

$\inf\limits_{x \in D} f(x) = -1$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = 5$.

b) $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -4$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = 0$.

c) Funcția f este monoton descrescătoare pe D și $\sup\limits_{x \in D} f(x) = f(0) = 2$,

$\inf\limits_{x \in D} f(x) = f(4) = 2\sqrt{5} - 4$.

d) Dacă $a = 0$, atunci $f(x) = b \cdot \cos x$ și $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -|b|$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = |b|$.

Dacă $a \neq 0$, atunci $f(x) = a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right)$. Alegem $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încît $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$ și rezultă:

$$f(x) = a(\sin x + \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos x) = \frac{a}{\cos\varphi}\sin(x+\varphi)$$

Deoarece $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, rezultă:

$f(x) = \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x+\varphi)$; ca atare, $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -\sqrt{a^2+b^2}$,

$\sup\limits_{x \in D} f(x) = \sqrt{a^2+b^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Reţinem totodată că $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$, $\forall\, x \in [0,\pi]$.

192. Care dintre următoarele funcţii sînt mărginite?

a) $f(x) = x\,\mathrm{sgn}x$

b) $f(x) = (2x+1)\cdot\sigma(x)$

c) $f(x) = 3\cdot\sigma(x+2)$

d) $f(x) = \sigma(x)\cdot|\sin x|$

e) $f(x) = \max(4,x^2)$

f) $f(x) = 1-||x|-1|$, unde $\mathrm{sgn}x = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ reprezintă funcţia semn iar $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x<0 \\ 1, & \text{dacă } x\ge 0 \end{cases}$ reprezintă funcţia numită treapta unitate (sau funcţia lui O.Heaviside).

R. Funcţiile a), b), e), f) sînt nemărginite iar funcţiile c) şi d) sînt mărginite.

193. Să se studieze mărginirea următoarelor funcţii:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{|x|+1}$;

c) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

d) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$;

e) $f:\mathbb{R}-Z\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin\Pi x}$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$.

R. Funcţiile b) şi f) sînt mărginite iar funcţiile a), c), d), e) sînt nemărginite.

194. Să se determine $\inf\limits_{x\in D} f(x)$, $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ pentru următoarele funcţii $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x-1$, $D_1 = [0,1]$, $D_2 = (-1,1)$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $D_1 = R_+^*$, $D_2 = (-1,10]$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_1 = [2,3]$, $D_2 = [\frac{1}{n}, n]$;

d) $f(x) = x^2-2x+1$, $D = [0,1]$;

e) $f(x) = x^3-1$, $D_1 = (0,5)$, $D_2 = (-5,5)$;

f) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $D = [0,1]$;

g) $f(x) = \cos 2x$, $D = [0, \frac{\Pi}{4}]$;

h) $f(x) = \sin^2 x$, $D = (-\frac{\Pi}{4}, \frac{\Pi}{4})$.

R. Notînd cu $m = \inf_{x \in D} f(x)$, $M = \sup_{x \in D} f(x)$, avem:

a) $m = 1$, $M = 1$

b) $m = 0$, $M = 1$

c) $m = \frac{1}{3}$, $M = \frac{1}{2}$

d) $m = 0$, $M = 1$

e) $m = -1$, $M = 24$

f) $m = \sqrt{2}-1$, $M = 1$

g) $m = 0$, $M = 1$

h) $m = 0$, $M = \frac{1}{2}$

195. Să se arate că următoarele funcţii $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sînt mărginite:

a) $f(x) = 3 \cdot \sin 2x$

b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3+x^2}$

e) $f(x) = 2\cos(x + \frac{\Pi}{3})$

f) $f(x) = 2^{-|x|}$

R.

a) $f(x) \leq 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $0 \leq f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
d) $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
e) $|f(x)| \leq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
f) $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

196. Să se studieze mărginirea următoarelor funcţii:
a) $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$;
b) $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$;
c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

R.

a) Pentru $n \in \mathbb{N}$ şi par: $\inf\limits_{x \in D} f(x) = 0$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = +\infty$; pentru $n \in \mathbb{N}$ şi impar: $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -\infty$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = +\infty$.

b) $\inf\limits_{x \in D} f(x) = 0$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = +\infty$.

c) $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -1$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = 1$

II.9. FUNCŢII CONVEXE

197. Să se arate că dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este convexă (J) pe I, atunci

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$.

Soluţie Dacă inegalitatea de mai înainte este verificată pentru $n = k$, atunci se verifică şi pentru $n = 2k$. Într-adevăr, fie $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2k}$, 2k puncte din I. Avem:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2k}}{2k}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k} + \frac{x_{k+1}+\ldots+x_{2k}}{k}}{2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right) + f\left(\frac{x_{k+1}+\ldots+x_{2k}}{2k}\right) \leq \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_{2k})}{n}$$

Deoarece inegalitatea este adevărată pentru $n = 2$, rezultă din

Scanned with OKEN Scanner

cele de mai înainte că aceasta este adevărată pentru orice $n = 2^k$.

Fie acum $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n puncte din I și fie m astfel ca $2^m > n$.

Punînd $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2^m} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ avem:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^m}}{2^m}\right) \leq$$

$$\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + (2^m - n) \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)}{2^m}$$

Deci:

$$2^m f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + (2^m - n) \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

Prin urmare, $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$

198. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție. Atunci f este convexă dacă și numai dacă $\forall a \in I$, funcția $\varphi : I - \{a\} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ este monoton crescătoare.

Soluție Fie $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in I - \{a\}$ și $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$. Atunci $\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}$. Se consideră cazul $x_1 < a < x_2$ și avem

$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} - \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} \leq 0$. Se obține $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & a & f(a) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0$.

Implicația f convexă $\Rightarrow$ monoton crescătoare, rezultă imediat.

199. Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$. Atunci f este convexă pe I dacă și numai dacă

$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0$, $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ cu $x_1 < x_2 < x_3$.

Soluție Dezvoltăm determinantul D înlocuind $x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$. Efectuînd calculele obținem: $D = (x_1 - x_3) \cdot [f(tx_1 + (1-t)x_3) - tf(x_1) -$

Scanned with OKEN Scanner

$(1-t)f(x_3)]$.

Dar $D \geq 0$ și $x_1 - x_3 < 0 \Rightarrow f(tx_1+(1-t)x_3) - tf(x_1) - (1-t)f(x_3) \leq 0$ și deci $f(tx_1+(1-t)x_3) \leq tf(x_1) - (1-t)f(x_3) \Rightarrow f$ este convexă.

Reciproc: dacă f convexă $\Rightarrow f(tx_1+(1-t)x_3) - tf(x_1) - (1-t)f(x_3) \leq 0$ și cum $x_1 - x_3 < 0 \Rightarrow D = (x_1-x_3) \cdot [f(tx_1+(1-t)x_3) - tf(x_1) - (1-t)f(x_3)] \geq 0$.

200. Dacă $f:I_1 \to \mathbb{R}$ este convexă (J) pe I_1, iar $g:I_2 \to \mathbb{R}$, $(f(I_1) \subset I_2)$ este convexă (J) pe I_2, rezultă că g o f este convexă (J) pe I_1?

R. Nu [$f(x) = x^2$, $x \in (-1,1)$; $g(x) = -x$, $x \in (-1,1)$].

201. Fie $f:I:\mathbb{R}$, I interval deschis. Să se arate că funcția f este convexă dacă și numai dacă funcțiile $r_a:I-\{a\} \to \mathbb{R}$, $r_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sînt nedescrescătoare $\forall a \in I$.

Soluție Fie $x, y \in I$, $x < y$. Deoarece r_a sînt nedescrescătoare, pentru $\forall a \in I$ avem $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$, de unde luînd $a = tx + (1-t)y$, $0 < t < 1$, se vede că $x < tx + (1-t)y < y$, după care rezultă că f este convexă.

Reciproc: presupunem f convexă și $a \in I$. Dacă $x<a<y$, scriem $a = \dfrac{y-a}{y-x}x + \dfrac{a-x}{y-x}y$ și convexitatea lui f avem $f(a) = \dfrac{y-a}{y-x}f(x) + \dfrac{a-x}{y-x}f(y)$, adică $r_a(x) \leq r_a(y)$. Cazurile $x < y < a$ și $a < x < y$ se tratează analog.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III. ŞIRURI DE NUMERE REALE. LIMITE DE ŞIRURI

III.1. NOŢIUNEA DE ŞIR

202. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului, cu termenul general dat de formula:

a) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$, $n \geq 0$

b) $b_n = tg \frac{\pi}{n+2}$, $n \geq 0$

c) $c_n = \sin\left(\frac{\pi}{9} \cdot n\right)$, $n \geq 0$

d) $d_n = \frac{1}{n-1}$, $n \geq 2$

e) $x_n = (-1)^{n-1} + 1$, $n \geq 1$

Soluţie

a) 1, 0, 1, 0, 1, ...

b) $tg \frac{\pi}{2}$, $tg \frac{\pi}{3}$, $tg \frac{\pi}{4}$, $tg \frac{\pi}{5}$, $tg \frac{\pi}{6}$

c) $\sin 0$, $\sin \frac{\pi}{9}$, $\sin \frac{2\pi}{9}$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{4\pi}{9}$

d) 2, 0, 2, 0, 2

203. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, are termenul general dat de formula $a_n = 6 - 4n$. Este termen al acestui şir numărul: a) -132, b) 150, c) -276, d) -102 ?

Soluţie

a) $6 - 4n = -132 \rightarrow n = \frac{138}{4} = 34{,}5 \notin N$, deci -132 nu este termen al acestui şir.

b) $6 - 4n = 150 \rightarrow n = 6 - \frac{150}{4} = -\frac{144}{4} = -36 \notin N$.

c) $6 - 4n = -276 \rightarrow n = 70{,}5 \notin N$.

d) $6 - 4n = -102 \rightarrow n = 27$, deci -102 este al 27-lea termen al şirului a_n.

204. Să se scrie primii 5 termeni ai şirurilor date de următoarele

Scanned with OKEN Scanner

formule de recurenţă:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2$

b) $c_1 = 3,\ c_2 = 1, c_{n+2} = c_n - c_{n+1}$

c) $a_1 = 8,\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$

Soluţie

a) $a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3;\ a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5;$
$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7;\ a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$

b) $c_1 = 3,\ c_2 = 1,\ c_3 = c_1 - c_2 = 3 - 2 = 1;$
$c_4 = c_2 - c_3 = 1 - 1 = 0;\ c_5 = c_3 - c_4 = 1 - 0 = 1$

c) $a_1 = 8,\ a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{8};\ a_3 = \frac{1}{a_2} = 8;\ a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{8};\ a_5 = \frac{1}{a_4} = 8.$

205. Să se determine expresia termenului general al şirurilor definite recursiv astfel:

a) $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = a_n \cos x + \cos nx,\ \forall n \geq 1$

b) $a_1 = 1, a_2 = 2\cos x$ şi

$$a_{n+1} = 2a_n \cos x - a_{n-1}, \forall n \geq 2.$$

Soluţie

a) Putem presupune că $x \in [0, 2\pi)$. Dacă $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, avem $\sin x \neq 0$.

Atunci: $a_2 = 1\cos x + \cos x = 2\cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x}$.

Fie $k \geq 2$ astfel încît $a_k = \sin\frac{kx}{\sin x}$. În acest caz avem:

$$a_{k+1} = \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot \cos x + \cos kx = \frac{\sin kx \cdot \cos x + \cos kx \cdot \sin x}{\sin x} = \frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$$

Arătăm prin inducţie că: $a_n = \frac{\sin nx}{\sin x},\ \forall n \geq 2.$

Dacă $x = 0$, avem $a_{n+1} = a_n + 1$, deci $a_n = n,\ \forall n \geq 1$.

Dacă $x = \pi$, avem $a_{n+1} = -a_n + (-1)^n,\ \forall n \geq 2$, deci $a_n = (-1)^{n+1} n,\ \forall n \geq 1$.

b) se procedează ca în cazul a).

Scanned with OKEN Scanner

206. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ definit recursiv astfel: $x_1 \in R$, $x_{n+1} = \frac{nx_n}{n+3}$, $\forall n \geq 1$.. Să se determine expresia lui x_n în funcţie de x_1 şi n.

Soluţie

$$x_{n+1} = n\frac{x_n}{n+3} \Leftrightarrow (n+3)x_{n+1} = nx_n,\ \forall n \geq 1;$$

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(k+3)\right] \cdot \prod_{k=1}^{n} x_{k+1} = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k,\ \forall n \geq 1 \text{ sau}$$

$$\left(\prod_{k=4}^{n+3} k\right)\left(\prod_{k=2}^{n+1} x_k\right) = n! \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k,\ \forall n \geq 1 \text{ şi deci}$$

$(n+1)(n+2)(n+3) \cdot x_{n+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x_1$, încît

$$x_{n+1} = \frac{6x_1}{(n+1)(n+2)(n+3)},\ \forall n \geq 1, \text{ deci}$$

$$6\frac{x_1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = n\frac{x_n}{n+3} \Rightarrow x_n = 6\frac{x_1}{n(n+1)(n+2)}.$$

207. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in N}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{1-x_n}}$, $0<x_0<1$.. Se consideră şirul $(y_n)_{n\in N}$ $y_n = \frac{x_n}{1-x_n}$. Să se exprime y_n în funcţie de x_0 şi n.

R. $y_n = y_0^{-2^n}$

208. Se consideră şirul $(U_n)_{n\geq 2}$ definit prin relaţia: $U_n = U_{n-1} + 2U_{n-2}$. Să se arate că există două numere r_1, r_2 nenule, astfel încît $U_n = \lambda r_1^n$ şi $V_n = \mu r_2^n$ satisfac relaţia de recurenţă $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

R. Ţinînd seama de relaţia de recurenţă obţinem $r_1^n = r_1^{n-1} + 2r_1^{n-2}$ si $r_2^n = r_2^{n-1} + 2r_2^{n-2}$, deci r_1 şi r_2 satisfac relaţia $r^2-r-2 = 0$ cu $r_1=2$, $r_2=-1$. Formăm suma $W_n=U_n+V_n$ şi arătăm că şirul (W_n) verifică relaţia de recurenţă.

209. Fie şirul $x_0 = a$, $x_{n+1} = \alpha x_n$, $n \geq 0$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

Să se scrie termenii x_1, x_2, x_3. Să se arate că $x_n = \alpha^n \cdot a$ pentru orice $n \geq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

R. $x_1 = \alpha a$; $x_2 = \alpha^2 \cdot a$; $x_3 = \alpha^3 \cdot a$.

Se demonstrează prin inducție că $x_n = \alpha^n \cdot a$, $\forall n \geq 0$.

210. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir astfel ca $x_1 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{(-1)^n}{2^n}$. Determinați expresia lui x_n.

R. $x_2 = x_1 - \frac{1}{2}$, $x_3 = x_2 + \frac{1}{4}$, ... și deci $x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

Adunînd aceste egalități, obținem $x_n = -\frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}$.

211. Se consideră șirul $(U_n)_{n\in N}$ definit prin relația de recurență

$U_n = 1 + \frac{2}{U_{n-1}}$, $U_1 = a$, $\forall n \geq 2$..

a) Se formează șirul $(v_n)_{n\in N}$ definit prin relația $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$.

Să se exprime v_n funcție de v_1.

b) Ce valoare w_q trebuie să ia u_1 astfel ca $u_q = 0$?

R. a) $V_n = (-\frac{1}{2})^{n-1} \cdot v_1$

b) $U_q = 0 \Rightarrow v_q = -2 \Rightarrow v_1 = (-2)^q \Rightarrow U_1 = \frac{2 + (-2)^q}{1 - (-2)^q} = W_q$

III.2. ȘIRURI MONOTONE

212. Să se arate că șirul dat de termenul general

$a_n = \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots [5 + 2(n-1)]}{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots [4 + 3(n-1)]}$ este strict descrescător.

Soluție $a_n - a_{n-1} = \frac{5}{4} \frac{7}{7} \ldots \frac{5 + 2(n-2)}{4 + 3(n-2)} \cdot \frac{2-n}{4 + 3(n-1)}$.

Pentru $n>2$, $a_n - a_{n-1} < 0$, deci $a_n < a_{n-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

213. Să se arate că şirul dat de termenul general $a_n = \frac{an+1}{an+3}$, unde $a>0$, este strict monoton.

Soluţie $a_{n+1}-a_n=\frac{a(n+1)+1}{a(n+1)+3}-\frac{an+1}{an+3}=2\frac{a}{[(an+1)+3](an+3)}$.

Deoarece $a>0$ rezultă că $a_{n+1}>a_n$ şi deci şirul este strict crescător.

214. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N}$ dat de termenul general

$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ este strict crescător.

R. $a_{n+1}-a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$

215. Să se studieze monotonia şirului dat de termenul general

$a_n = \frac{(n!)^2}{\sqrt{n!}}$, $n \in \mathbb{N}$

Soluţie

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{(n!)^2} = \frac{(n!)^2(n+1)}{\sqrt{n!}\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{(n!)^2} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} > 1$$

deci $a_n < a_{n+1}$ ⇒ şirul este strict crescător.

216. Să se studieze monotonia şirului dat de termenul general

$U_n = \frac{n! \cdot e^n}{n^n}$, $n \geq 1$.

Soluţie $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)! \cdot e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!e^n}{n^n} = (\frac{n}{n+1})^n e > 1 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$.

Avem deci un şir strict crescător.

217. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton $\Leftrightarrow (x_{n+1}-x_n)(x_n-x_{n-1})>0$, $\forall n \geq 1$.

Soluţie Implicaţia ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Din $(x_{n+1}-x_n)(x_n-x_{n-1}) > 0$ rezultă $x_2 - x_1 \neq 0$, spre exemplu $x_1<x_2$. În acest caz vom arăta prin inducţie că $x_n<x_{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Fie în acest scop $n \geq 1$ cu $x_n<x_{n+1}$, deci $x_{n+1} - x_n > 0$. Din $(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1}) > 0$ rezultă $(x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+1} - x_n) > 0$, deci

Scanned with OKEN Scanner

$x_{n+1} < x_{n+2}$.

Prin urmare $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

Observație: Dacă $(x_{n+1}-x_n)(x_n-x_{n-1}) \geq 0$, $\forall n \geq 1$ nu rezultă în general că $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton. De exemplu: 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, ... este un șir care satisface inegalitatea din enunț și nu este monoton.

218. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir monoton crescător (respectiv descrescător) de numere reale. Atunci șirul $(\bar{a}_n)_{n\geq 1}$, unde $\bar{a}_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, $\forall n \geq 1$, este monoton crescător (respectiv descrescător).

Soluție Presupunem $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton crescător.

Avem

$$\bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n = \frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \frac{1}{n+1}a_{n+1} =$$

$$- \frac{1}{n(n+1)}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \frac{n}{n(n+1)}a_{n+1}\right) =$$

$$\frac{1}{n(n+1)}\left[(a_{n+1} - a_1) + (a_{n+1} - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)\right] \geq 0,$$

deci $\bar{a}_{n+1} \geq \bar{a}_n$, $\forall n \geq 1$ și deci $(\bar{a}_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. Analog se demonstrează afirmația pentru cazul cînd șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător.

219. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, *cu* $x_n = \dfrac{1}{2^{2n}}C_{2n}^n$, $\forall n \geq 1$ este strict descrescător.

Soluție $x_{n+1} = \dfrac{1}{2^{2n+2}}\dfrac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} = \dfrac{1}{2^{2n}}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} < x_n$.

220. Să se studieze monotonia șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, definit astfel

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \lambda\sqrt{n},\ \forall n \geq 1,\ \textit{cu}\ \lambda \in R,\ \text{fixat.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \lambda\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = x_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{\lambda}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= x_n + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\left(1 \mp \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) < (\ resp. >\ )\ x_n$$

dacă $\lambda \geq 2$ şi $n \geq 1$ (resp. $\lambda < 2$ şi n suficient de mare). Deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, dacă $\lambda \geq 2$ şi crescător de la un anumit rang, dacă $\lambda < 2$.

221. Fie şirul cu termenul general $a_k = \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$, $k \in N^*$, şi şirul cu termenul general $b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Să se arate că $(b_n)_{n\in N}$ este strict crescător,

Soluţie

$b_{n+1} = a_{n+1} + b_n \Rightarrow b_{n+1} - b_n = a_{n+1}$ şi $a_{n+1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}$, şi cum

$0 < \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 1$ rezultă că $a_{n+1} > 0$ (funcţia logaritmică cu baza subunitară este descrescătoare) şi $b_{n+1} - b_n > 0$, deci şirul $(b_n)_{n\in N}$ este strict crescător.

222. Să se studieze monotonia şirului $(a_n)_{n\in N}$ dat prin relaţia de recurenţă: $a_1 = \sqrt{a}$, $a_n = \sqrt{a+a_{n-1}}$, $a \in (0,\infty)$

Soluţie Conform relaţiei de recurenţă avem:

$a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}$, $a_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, ...

Pentru a studia monotonia şirului $(a_n)_{n\in N}$ vom folosi metoda inducţiei complete. Mai întîi să observăm că toţi termenii sînt >0 şi

$a_1 < a_2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{a+\sqrt{a}} \Leftrightarrow a < a+\sqrt{a} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{a}$, evident adevărată.

$a_2 < a_3 \Leftrightarrow a_2^2 < a_3^2 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{a+\sqrt{a}} \Rightarrow 0 < \sqrt{a}$.

Presupunem adevărată: $a_{n-2} < a_{n-1}$ şi vom demonstra $a_{n-1} < a_n$:

$a_n = \sqrt{a+a_{n-1}} \Rightarrow a_n^2 = a + a_{n-1}$; $a_{n-1} = \sqrt{a+a_{n-2}} \Rightarrow a_{n-1}^2 = a + a_{n-2}$;

$a_n^2 - a_{n-1}^2 = a_{n-1} - a_{n-2}$, dar $a_{n-1} - a_{n-2} > 0$ conform cu ipoteza de

Scanned with OKEN Scanner

recurență, deci $a_n^2 - a_{n-1}^2 > 0 \Rightarrow (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1} > 0$ dar cum a_n, a_{n-1} sînt numere pozitive $\Rightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Rightarrow a_{n-1} < a_n$, deci șirul $(a_n)_{n\in N}$ este strict crescător.

223. Studiați monotonia șirului dat de $a_n = (-1)^n \frac{n}{2n^2+1}$, $n \in N$.

R. Șirul $(a_n)_{n\in N}$ nu este monoton.

224. Să se studieze monotonia șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = \left(a - \frac{1}{n}\right)^{\frac{(-1)^n}{n}}$, $\forall n \geq 1$ și $a > 1$ fixat.

R. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este monoton, deoarece toți termenii x_n, cu $n \geq n_0$ și n par, sînt mai mari ca 1, în timp ce termenii x_n, cu $n \geq n_0$ și n impar, sînt mai mici ca 1.

225. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2)$, $\forall n \geq 1$ *și* $0 \leq a \leq 1$ este monoton crescător.

R. $\forall\, n \geq 1$, $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}(x_n - x_{n-1})$ de unde deducem

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n + x_{n-1})\ldots(x_2 + x_1)(x_1 + x_0)}{2^n}(x_1 - x_0).$$

Deoarece $x_1 - x_0 = \frac{1}{2}$, $a \geq 0$, rezultă că $x_{n+1} - x_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător.

226. Să se arate că următoarele șiruri sînt strict crescătoare:

a) $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$

b) $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

R. a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$

Scanned with OKEN Scanner

227. Se consideră șirul $a_n=\sum_{k=2}^{n}\ln(1-\frac{1}{k^2})$, $n\in N$.

Să se aducă a_n la forma cea mai simplă și să se studieze monotonia sa.

$$a_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\ln\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\ln\left[\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]=$$

$$=\ln\left[\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\right]=\ln\frac{n+1}{2^n}$$

$$a_{n+1}-a_n=\ln\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<0\Rightarrow$$

șirul este strict descrescător.

228. Să se arate că șirul dat de termenul general

$x_n=1+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\ldots+\frac{n}{4^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$ este monoton.

229. Să se arate că următoarele două șiruri nu sînt monotone:

a) $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{(-1)^n\cdot n}$.

b) $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1=0$, $x_{n+1}=x_n+\frac{(-1)^n}{2^n}$.

III.3. ȘIRURI MĂRGINITE

230. Să se arate că dacă șirul de numere reale $(a_n)_{n\in N}$ satisface relația de recurență: $a_{n+1}=\frac{(a_n+a_{n-1})(1-a_na_{n-1})}{(1+a_n^2)(1+a_{n-1}^2)}$, $\forall n\in N$, atunci acesta este mărginit.

Soluție În ipoteza că $a_n+a_{n-1}\neq 0$ și $1-a_na_{n-1}\neq 0$ avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$a_{n+1}=\frac{1}{\frac{a_n+a_{n-1}}{1-a_na_{n-1}}+\frac{1}{\frac{a_n+a_{n-1}}{1-a_na_{n-1}}}}=\frac{\alpha}{\alpha^2+1},$$ unde am notat $\frac{a_n+a_{n-1}}{1-a_na_{n-1}}=\alpha$.

Deoarece $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, avem $\frac{|\alpha|}{1+\alpha^2}\le\frac{1}{2}$, rezultă că $|a_{n+1}|\le\frac{1}{2}$, ceea ce ne arată că şirul este mărginit.

231. Se consideră şirul cu termenul general

$S_n=\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+a}}+\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2a}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+na}}$ unde $a>0$, $p\ge2$, $n\in\mathbb{N}$. Să se arate că şirul este mărginit.

Soluţie $S_n<\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+a}}<\frac{n}{\sqrt[p]{n^p}}=\frac{n}{n}=1.$

Cum $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere pozitive înseamnă că pentru $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n\in(0,1)$, deci este un şir mărginit.

232. Să se arate că şirul $(U_n)_{n\ge1}$ de termen general $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)^{k+1}}$ este mărginit superior.

Soluţie

$$U_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=$$

$$=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!}<1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

233. Să se arate că şirurile $a_n=\frac{2^n}{n!}$ şi $b_n=\frac{3^n+2^n}{5^n}$, $n\ge1$ sînt mărginite.

Soluţie

a) $0\le a_n=\frac{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}=\frac{2\cdot2}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n}\right)\le2,$, adică

$a_n\in[0,2]$, $\forall n\ge1$, *deci* $m=0$, $M=2$.

b) $b_n=\frac{3^n+2^n}{5^n}=\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n$. Este evident că: $0\le b_n\le2$, $\forall n\ge1$.

Scanned with OKEN Scanner

234. Care este marginea inferioară și marginea superioară pentru șirurile următoare:

a) $a_n = \frac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin n\frac{\pi}{2}$;

b) $a_n = \frac{1}{n-3,4}$?

Soluție

a) Observăm că:

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n = 2k,\ k = 1, 2, \ldots \\ \frac{1}{n^2} + 1, \text{ dacă } n = 4k+1,\ k=0, 1, 2,\ldots \\ \frac{1}{n^2} - 1, \text{ dacă } n = 4k-1,\ k= 1, 2,\ldots \end{cases}$$

Se verifică $m = -1$ și $M = 2$.

b) Scriem primii termeni ai șirului: $-\frac{1}{2,4}, -\frac{1}{1,4}, -\frac{1}{0,4}, \frac{1}{0,6}, \frac{1}{1,6}, \ldots$

Observăm că termenii a_1, a_2, a_3 sînt negativi și descrescători iar ceilalți termeni, pozitivi și descrescători.

Rezultă că $m = -\frac{1}{0,4}$ și $M = \frac{1}{0,6}$.

Aceste numere verifică proprietățile marginii inferioare și marginii superioare.

235. Să se determine marginea inferioară și marginea superioară pentru următoarele șiruri:

a) $a_n = (1+\frac{1}{n})^n \cdot \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos n\frac{\pi}{2}$

b) $a_n = \frac{n+1}{n} \cdot \sin n\frac{\pi}{2}$

c) $a_n = 2 + (-2)^n$

d) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$

R. Notînd cu M și m marginea superioară și respectiv marginea inferioară, avem:

a) $M = \frac{3e}{2} + 1$; $m = -\frac{e}{2}$

Scanned with OKEN Scanner

b) $M=2;\ m=-\frac{4}{3}$

c) $M=+\infty;\ m=-\infty$

d) $M=1;\ m=0$

236. Să se arate că șirurile următoare sînt mărginite și să se determine $\inf\limits_{n\in N} a_n$ și $\sup\limits_{n\in N} a_n$.

a) $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2},\ n\geq 1$; b) $a_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n},\ n\geq 0$;

c) $a_n=\frac{1}{n^2},\ n\geq 1$

d) $a_n=\frac{2n+1}{n+2},\ n\geq 0$; e) $a_n=\min(10,n),\ n\geq 0$;

f) $a_n=\cos\frac{1}{n},\ n\geq 1$.

R.

a) $\inf\limits_{n\in N^*} a_n=0,\ \sup\limits_{n\in N^*} a_n=1$; b) $0\leq a_n\leq\frac{2}{\sqrt{n}}\leq 2, \forall n\geq 1$;

$\inf\limits_{n\in N^*} a_n=0;\ \sup\limits_{n\in N^*} a_n=\sqrt{2}$; c) $\inf\limits_{n\in N^*} a_n=0;\ \sup\limits_{n\in N^*} a_n=1$;

d) $\inf\limits_{n\in N} a_n=\frac{1}{2};\ \sup\limits_{n\in N} a_n=2$;

e) $\inf\limits_{n\in N} a_n=a_0=0;\ \sup\limits_{n\in N} a_n=10$; f) $\inf\limits_{n\in N^*} a_n=\cos 1;\ \sup\limits_{n\in N} a_n=1$.

237. Să se determine marginea inferioară și marginea superioară pentru următorul șir: $a_n=1-\frac{1}{n},\ n\geq 1$.

Soluție Șirul este crescător și convergent către 1. Marginea inferioară m = 0. Într-adevăr: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n\geq 0$ și $\forall\ \alpha>0,\ \exists\ a_1<1$ astfel încît $a_1<\alpha$. Marginea superioară a șirului este M = 1. Într-adevăr, nu există nici un termen al șirului mai mare ca 1, ceea ce este evident; oricare ar fi $\alpha>1$, există cel puțin un termen $a_n>\alpha$, căci inegalitatea $1-\frac{1}{n}>\alpha$

Scanned with OKEN Scanner

este satisfăcută dacă $n > \frac{1}{1-\alpha}$.

238. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 2}$ unde $x_n = \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n]{n}}}$. Să se afle $\sup\limits_{n\geq 2} x_n$.

R. $\sup\limits_{n\geq 2} x_n = 2$.

239. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in N^*}$ unde $x_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}$ este mărginit superior de 3.

R. Se ține cont că $\sqrt{n+\sqrt{n+1}} > \sqrt{n}$ și $\sqrt{b} \leq \frac{1+b}{2}$, $\forall b \in R_+$.

240. Fie $(x_n)_{n\in N}$ un șir definit astfel:

$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{x}{x_n}\right)$, $\forall n \in N$, unde x_0, $x \in R_+^*$.

Să se arate că șirul este mărginit.

R. $\sqrt{x} \leq x_n \leq x_0$ *sau* x_1, după cum $x_0 \geq x_1$ *sau* $x_0 \leq x_1$.

241. Să se arate că șirurile $\left(\frac{1}{n-2}\right)_{n\geq 3}$; $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n\geq 0}$ sînt mărginite.

R. $0 < \frac{1}{n-2} \leq 1$, $\forall\, n \geq 3$; $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} \leq 1$, $\forall\, n \geq 0$.

242. Fie șirul cu termenul general $a_k = \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$, $k \in N$ și șirul cu termenul general: $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Să se arate că $(b_n)_{n\in N}$ este mărginit.

Soluție

$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}$, și cum $0 < \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 1$ (din monotonia funcției logaritmice), atunci $a_{n+1} > 0$ și $b_{n+1} - b_n > 0$ deci șirul $(b_n)_{n\in N}$ este strict crescător.

Scanned with OKEN Scanner

Cum b_n este o sumă de logaritmi, deducem că:

$b_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{2n+2} > 0$, *dar* $\frac{n+2}{2n+2} > \frac{1}{2}$ și ținînd cont de monotonia funcției logaritmice, deducem: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{2n+2} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$, *deci* $b_n < 1$ *si* $b_n > 0$ pentru orice n natural, deci $b_n \in (0,1)$.

III.4. ȘIRURI CONVERGENTE. OPERAȚII CU ȘIRURI CONVERGENTE. LIMITE DE ȘIRURI

243. Să se studieze convergența șirului de termen general

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+n+1} \cdot \cos n! + \frac{a^{8n}}{(1+a^n)(1+3a^{2n})(1+a^{5n})},\ a > 0$$

Soluție Deoarece $|\cos n!| \leq 1$, *iar* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+n+1} = 0$, rezultă că

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+n+1} \cos n! = 0$.

Să calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *unde* $b_n = \frac{a^{8n}}{(1+a^n)(1+a^{2n})(1+a^{5n})}$

Dacă $a<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Dacă $a=1$, atunci $b_n = \frac{1}{8}$ *și deci* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{8}$.

Dacă $a>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a<1 \\ \frac{1}{8}, \text{ dacă } a=1 \\ 1, \text{ dacă } a>1 \end{cases}$

244. Folosind definiția convergenței unui șir, să se arate că

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n+2} = \frac{2}{5}$

Soluție Trebuie să arătăm că pentru $\forall\, \epsilon>0, \exists\, N(\epsilon)$ astfel încît

Scanned with OKEN Scanner

pentru orice $n>N(\epsilon)$ să avem $\left|\frac{2n+1}{5n+2}-\frac{2}{5}\right|<\epsilon$

Într-adevăr, membrul stîng al inegalității se mai scrie

$\left|\frac{2n+1}{5n+2}-\frac{2}{5}\right|=\frac{1}{5(5n+2)}$, și inegalitatea devine

$\frac{1}{5(5n+2)}<\epsilon$, *de unde* $n>\frac{1}{25\epsilon}-\frac{2}{5}$.

Luînd $N(\epsilon)=[\frac{1}{25\epsilon}-\frac{2}{5}]$ rezultă că pentru $n>N(\epsilon)$ avem

$\left|\frac{2n+1}{5n+2}-\frac{2}{5}\right|<\epsilon$, (unde [x] este partea întreagă a lui x).

245. Folosind definiția convergenței unui șir să se arate că:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$.

Soluție $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|=\frac{1}{n+1}$. Pentru $\forall\,\epsilon>0$ condiția $\frac{1}{n+1}<\epsilon$, adică $n>\frac{1}{\epsilon}-1$, are loc pentru $\forall n>N(\epsilon)$ unde $N(\epsilon)=\left[\frac{1}{\epsilon}-1\right]+1$.

246. Să se arate pornind de la definiție că șirul: $\left(\frac{3n^2+5}{5n^2+1}\right)_{n\geq 0}$ converge la $\frac{3}{5}$.

247. Folosind criteriul general de convergență al lui Cauchy, să se demonstreze convergența următoarelor șiruri de termen general:

a) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$;

b) $b_n=\frac{\sin 1!}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{\sin n!}{n\cdot(n+1)}$.

Soluție

a) Vom arăta că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ satisface criteriul lui Cauchy, adică pentru $\forall\,\epsilon>0$, $\exists\,N(\epsilon)$ astfel încît pentru $\forall\,n>N(\epsilon)$ și $p\in N$ să avem

$|a_{n+p}-a_n|<\epsilon$

Scanned with OKEN Scanner

$$a_{n+p} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

Folosind inegalitatea $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $k \geq 2$, întreg, vom avea:

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Fie $\frac{1}{n} < \epsilon$, *atunci* $n > \frac{1}{\epsilon}$.

Dacă luăm $N(\epsilon) = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, atunci pentru $n > N(\epsilon)$ avem $\frac{1}{n} < \epsilon$, deci $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$.

b) $$b_{n+p} = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\sin n!}{n \cdot (n+1)} + \frac{\sin (n+1)!}{(n+1) \cdot (n+2)} + \ldots + \frac{\sin (n+p)!}{(n+p) \cdot (n+p+1)}$$

$$|b_{n+p} - b_n| = \left| \frac{\sin (n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\sin (n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\sin (n+1)!|}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{|\sin (n+p)!|}{(n+p)(n+p+1)}$$

Dar $|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Deci:

$$|b_{n+p} - b_n| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}$$

Dacă luăm $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ *atunci* $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ și, notînd $N(\epsilon) = \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 \right]$, rezultă $|b_{n+p} - b_n| < \epsilon$, $\forall n > N(\epsilon)$ *si* $p \in \mathbb{N}$.

Deci șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

248. Să se arate că șirul $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ este divergent.

Soluție Fie V_0 o vecinătate a lui $+\infty$, deci există $\epsilon > 0$, astfel încît $(\epsilon, \infty) \subset V$. Punînd condiția $n^2 > \epsilon$, rezultă $n^2 \in V$. Cu alte cuvinte,

Scanned with OKEN Scanner

luînd $N = [\sqrt{\epsilon}] + 1$, rezultă că $\forall n \geq N$, avem $n > \sqrt{\epsilon}$, deci $n^2 > \epsilon$, adică $n^2 \in V$. În concluzie toți termenii șirului $a_n = n^2$ aparțin lui V de la un rang încolo și ca atare $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, șirul este divergent.

249. Să se studieze convergența șirurilor:

$a)\ a_n = \frac{2n+1}{n+1}$; $b)\ a_n = \frac{2^n}{n!}$; $c)\ a_n = 1 - 3^{-n}$;

$d)\ a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$, $n \geq 1$.

R. Toate șirurile sînt convergente.

250. Să se arate că următoarele șiruri sînt divergente:

$a)\ (\sqrt{n})_{n\geq 1}$, $b)\ (2^{n-1})_{n\geq 1}$, $c)\ \left(\frac{n^2+4}{n}\right)_{n\geq 1}$

251. Se dau $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$. Se definesc șirurile:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n);\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n);$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ pentru } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt convergente și au limita comună egală cu $\frac{a_0+b_0+c_0}{3}$.

Soluție Adunînd cele trei relații obținem:

$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deci:

$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \ldots = a_0 + b_0 + c_0 = a \in \mathbb{R}$

Dar $b_n + c_n = a - a_n$ de unde rezultă că $2a_{n+1} = a - a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Putem scrie:

$$2a_{n+1} = a - a_n$$

$$2a_n = a - a_{n-1}$$

$$2a_{n-1} = a - a_{n-2}$$

$$2a_1 = a - a_0$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulţim relaţiile precedente cu numerele scrise în partea dreaptă a barei.

$$\begin{array}{lll} 2a_{n+1} = a - a_n & | & \\ 2a_n = a - a_{n-1} & | & -1 \\ 2a_{n-1} = a - a_{n-2} & | & \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{----------} & | & \\ 2a_1 = a - a_0 & | & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{array}$$

Le adunăm şi obţinem:

$2a_{n+1} = a\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]-a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, ceea ce este echivalent cu $2a_{n+1} = a\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}}-a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Trecînd la limită obţinem $2\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \dfrac{2a}{3}$ şi deci:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \dfrac{a}{3} = \dfrac{a_0+b_0+c_0}{3}$. Analog pentru $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n+1}$.

252. Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ unde $a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}$ este convergent.

Soluţie Avem: $\sqrt{n+\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n-1+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}} > \sqrt{n-1+\sqrt{n}}, \ldots$

Deci $a_{n+1} = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}} > \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}} = a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, ceea ce arată că şirul dat este strict crescător.

Mai departe, vom ţine seama că: $\sqrt{b} \le \dfrac{1+b}{2}$, $\forall b\in\mathbb{R}_+$ şi deci,

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}} \le \frac{1+1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}{2} =$$

$$= \frac{2}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}{2} \le \frac{2}{2}+\frac{1+2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}{4} \le$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\leq \frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1+3+\sqrt{4+\ldots+\sqrt{n}}}{8} \leq \frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{1+4+\sqrt{5+\ldots+\sqrt{n}}}{16} \leq$$

$$\leq \frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{\sqrt{5+\ldots+\sqrt{n}}}{16} \leq \frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\ldots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{1+(n-1)+\sqrt{n}}{2} \leq$$

$$\leq \frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\ldots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}$$

Prin urmare: $a_n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$.

Dar $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = 1$, iar

$\frac{i}{2^i} < \left(\frac{3}{4}\right)^i < \frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\ldots < \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3$ și rezultă că $a_n < 1+3=4$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit superior. Fiind strict crescător și mărginit superior rezultă că este convergent.

253. Să se arate că șirul $\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, $(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}$, ... este convergent.

R. $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} < \sqrt{2^2} = 2$, $(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}} < \sqrt{2^2} = 2$. Se arată prin inducție că este strict crescător și mărginit superior de 2.

254. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în care $a_1 = \sqrt[3]{6}$ și $a_n = \sqrt[3]{6+a_{n-1}}$, $n \geq 2$ este convergent.

R. Șirul este strict crescător și mărginit deoarece pentru $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [a_1, 2]$. Cum șirul este convergent din ecuația $l = \sqrt[3]{6+l}$ se obține $l=2$, deci converge la 2.

255. Fie $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot n^2 + e^{-n}}{(-1)^n \cdot n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să se verifice dacă șirul dat este convergent.

Soluție Avem $x_{n+1} = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2 \cdot e^n}$, deci $|x_{n+1} - 1| = \frac{1}{n^2 \cdot e^n}$ care ne spune că șirul este convergent având limita 1.

Scanned with OKEN Scanner

256. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 2}$ unde $x_n = \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n]{n}}}$ este convergent.

Soluție Evident $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \geq 2$ deoarece $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+\sqrt[n+1]{n+1}}$ rezultă șirul $(x_n)_{n\geq 2}$ este strict crescător. Cum $2^n = (1+1)^n = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots \geq n+2$ rezultă că $\sqrt[n]{n+2} \leq 2$, $\forall n \geq 2$.

Atunci

$$x_n \leq \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n-1]{(n-1)+2}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n-2]{(n-2)+2}}} \leq \ldots \leq \sqrt{2+\sqrt[3]{3+2}} \leq 2$$

deci $(x_n)_{n\geq 2}$ este majorat de numărul 2. Prin urmare $(x_n)_{n\geq 2}$ este convergent.

257. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir convergent la zero și $(b_n)_{n\geq 1}$ un șir mărginit.

Atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ unde: $x_n = \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n}$ este convergent la zero.

Soluție Din $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(|a_1| + \ldots + |a_n|\right) = 0$$

Însă $(b_n)_{n\geq 1}$ este mărginit deci există $M>0$, astfel încît $|b_n|<M$, $\forall n \geq 1$.

Prin urmare: $|x_n| \leq \frac{1}{n}\left(|a_1|\cdot|b_n| + \ldots + |a_n|\cdot|b_1|\right) \leq \frac{M}{n}\left(|a_1| + \ldots + |a_n|\right)$.

Rezultă deci că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

258. Fie un număr real $0 \leq a \leq 1$. fie $a_1 = \sqrt{1-a}$ și $a_n = \sqrt{1-a_{n-1}}$ pentru $n \geq 2$. Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soluție Dacă $a_1 = a_2 \Rightarrow \sqrt{1-\sqrt{1-a}} = \sqrt{1-a} \Rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow$ $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in (0, 1)$ și în acest caz șirul este constant și deci convergent. În cazul $a=0$ șirul este divergent și la fel pentru $a=1$ unde

Scanned with OKEN Scanner

avem șirul 0, 1, 0, 1, ... Să presupunem că $a \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$; atunci se vede că $a_1 < a_2$ de unde rezultă $a_3 < a_2$ și $a_1 < a_3$.

Rezultă $a_4 = \sqrt{1-a_3} > \sqrt{1-a_2} = a_3$ *si* $a_4 = \sqrt{1-a_3} < \sqrt{1-a_1} = a_2$. Așadar $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$. Prin inducție completă se demonstrează inegalitățile: $a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n}$. De aici deducem că subșirul termenilor de rang impar al șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și șirul termenilor de rang par al acestuia sînt convergente. Fie $U = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, $V = \lim\limits_{n\to\infty} U_{2n}$. Din $a_{n+1} = \sqrt{1-a_n}$ deducem $U = \sqrt{1-v}$, $v = \sqrt{1-U}$ din care, observînd că $U \neq 0$, $U \neq 1$, $V \neq 1$, $V \neq 0$, obținem $U = V = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Să analizăm acum cazul $a \in \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Avem $1-a \in \left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2, 1\right)$ *si deci* $\sqrt{1-a} \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$, și atunci neglijînd primul termen al șirului, sîntem în situația de mai sus; rezultă că pentru $a \neq 0$, $a \neq 1$ șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent și are limita $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

259. Fie șirul $X_{n+1} = \alpha X_n + \frac{n^2}{2^n}$ *cu* $X_0 = 0$, $n \geq 0$.

Să se determine α real astfel ca șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să fie convergent.

Soluție Pentru $\alpha \neq \frac{1}{2}$,

$$X_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \alpha} \cdot \alpha^n + \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha} - \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2} + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^3}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, atunci șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă $\alpha \in (-1, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$, *atunci* $X_n = \frac{1}{2^n} \cdot \left[\frac{2n^3}{3} - n^2 + \frac{n}{3}\right]$, $n \geq 0$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$, deci şirul X_n este convergent pentru $\alpha \in (-1, 1)$.

260. Folosind criteriul lui Cauchy să se arate divergenţa şirului

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Soluţie Presupunem prin absurd că şirul este convergent. Atunci ar trebui ca $\forall \epsilon > 0$ să existe un număr natural $N(\epsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\epsilon)$ să avem $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

În particular, ar trebui să avem, începînd de la un anumit rang,

$|a_{2n} - a_n| < \epsilon = \frac{1}{2}$.

Însă $|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termeni}} = \frac{1}{2}$

Aşadar şirul este divergent.

261. Să se arate că şirul avînd termenul general

$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ este convergent către numărul e.

Soluţie Folosind criteriul general al lui Cauchy se obţine:

$$e_{n+p} - e_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}\right] <$$

$$< \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^p}\right] < \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n} < \epsilon \text{ pentru}$$

$n > \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$ ceea ce demonstrează convergenţa şirului. Din dezvoltarea:

Scanned with OKEN Scanner

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!} + \ldots + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{n-1}{n})}{n!}$$

și din inegalitatea $\frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!} < \frac{1}{k!}$, se obține $S_n < e_n$; deci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} e_n$, adică $e \leq \lim\limits_{n\to\infty} e_n$. Fixînd k și păstrînd numai primii $k+1$ termeni din dezvoltare, se obține:

$$S_{n_k} = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \ldots + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!} < S_n < e \text{ deci}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n_k} = e_k < e_n$, $\forall\, k \in N$; $\lim\limits_{k\to\infty} e_k \leq e$ și ținînd seama de inegalitatea $e \leq \lim\limits_{n\to\infty} e_k$ se obține $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$.

262. Să se arate că șirul $(U_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general: $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(K+1)^{K+1}}$ este convergent.

Soluție Vom arăta mai întîi că șirul U_n este strict crescător:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{(n+2)^{n+2}} > 0 \Rightarrow U_n < U_{n+1}.$$

Pentru a demonstra că este convergent, va trebui să arătăm că este mărginit superior.

Într-adevăr:

$$U_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} =$$

$$= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} < 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

Șirul U_n fiind strict crescător și mărginit superior este covergent.

Scanned with OKEN Scanner

263. Să se arate că șirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \geq 1$ este convergent.

Soluție Vom arăta că șirul a_n este descrescător și mărginit inferior.

Din inegalitățile $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ obținem

$\frac{1}{n+1} < \ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}$. Dăm lui n valorile 1, 2, ..., k și obținem:

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} < \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{k+1} < \ln(1+k) - \ln k < \frac{1}{k}$$

Prin adunare avem:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1} < \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(1+k) -$$

$$- (\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln k) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k},$$

$\ln k < \ln(k+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$, de unde rezultă că $a_k > 0$ adică șirul este format din termeni strict pozitivi. Făcînd diferența $a_{k+1} - a_k$ se obține că șirul a_n este descrescător. Fiind descrescător și mărginit inferior rezultă că este convergent. Limita acestui șir este

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = c = 0{,}572\ldots$ și se numește constanta lui Euler.

264. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in N}$ cu $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

Scanned with OKEN Scanner

este convergent.

Soluție Avem

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ *deci* $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ adică șirul dat este strict crescător. Să arătăm că este mărginit superior. Logaritmînd termenul general obținem:

$$\ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ldots \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Deci $x_n < e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul dat este mărginit superior, prin urmare este convergent.

265. Să se studieze convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{7}{10} + \ldots + \frac{1 + 3(n-1)}{2 + 4(n-1)}$

b) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$

R. a) și b) divergente; c) convergent.

266. Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$,

$a_n = \sqrt[4]{2 + \sqrt[4]{2 + \ldots + \sqrt[4]{2}}}$, numărul radicalilor fiind n.

R. Se observă că $a_{n+1} = \sqrt[4]{2 + a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, după care se arată că este monoton și mărginit. Deci este convergent.

267. Fie $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n^2 + 1$, $n \geq 1$. Șirul (x_n), $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent?

R. Dacă șirul ar fi convergent, ar trebui să aibă o limită $l > 0$. Dar din $x_{n+1} = x_n^2 + 1 \Rightarrow l = l^2 + 1$, ecuație care nu este satisfăcută pentru $l > 0$ și finit.

268. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{2^{2n}} \cdot C_{2n}^n$ este convergent.

Scanned with OKEN Scanner

R. Se demonstrează că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit.

269. Să se arate că șirul definit prin $x_1 = a$, $2n \cdot X_n = (2n-1) \cdot X_{n-1}$, $n \geq 2$, unde $a>0$ este o constantă, este convergent.

R. $0 < x_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot x_{n-1} = \ldots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{2n(2n-2)\ldots 2} \cdot a$ și folosind inegalitatea mediilor se arată că șirul $(X_n)_{n\geq 2}$ converge la 0.

270. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ unde: $x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ este convergent.

R. $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1; \frac{1}{2} = x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots > 0.$

Șirul fiind strct descrescător și mărginit inferior este convergent.

271. Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ dat prin $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $\forall\, n \geq 2$.

R. Convergent la 2.

272. Fie șirurile:

$$a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2+1}$$

$$b_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{3n^3+5n+2}$$

Să se cerceteze dacă șirul $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in N}$ este convergent.

Soluție Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2+1} = \frac{1}{4} \text{ iar}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{3n^3+5n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3+30n+12} = \frac{1}{9}$$

rezultă că șirurile $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$ sînt convergente și avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{4}.$$

Deci șirul $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in N}$ este convergent la $\frac{9}{4}$.

273. Dacă șirurile $a_n=\frac{3n^2+5}{2n^2-1}$ și $b_n=\frac{1}{n+2}$ sînt convergente respectiv la $\frac{3}{2}$ și 0 să se arate că șirul $(a_n^{b_n})_{n\in N}$ este convergent la 1.

Soluție $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{b_n}=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2-1})^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}}=(\frac{3}{2})^0=1$

274. Dacă șirurile date de $a_n=(\frac{1}{2})^n+2$, $b_n=\frac{2^n}{(2^{n^2}+1)^n}$ și $c_n=\frac{10^{2n}}{1+10^{2n}}$ converg respectiv la 2, 0 și 1, la ce limită converge șirul $\alpha a_n^2+\beta b_n+\gamma c_n^{10}$? $(\alpha,\beta,\gamma\in R)$

R. $4\alpha+\gamma$.

275. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+p}}{a_n}=1$, $\forall p\in\mathbb{N}$ rezultă că șirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent?

Soluție Dacă $a_n=n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$ pe cînd $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$. Răspunsul este deci negativ.

276. Să se arate că dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este un șir convergent către un număr nenul, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. Să se dea un exemplu de șir $(a_n)_{n\geq N}$, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ să existe și să fie diferită de 1.

Soluție Șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ fiind convergent rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $a\in R$. Cum $(a_{n+1})_{n\geq 0}$ este subșir al șirului $(a_n)_{n\geq 0}$, el are aceeași limită a, deci

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\frac{a}{a}=1.$$

Dacă $a_n=\frac{(-1)^n}{n+2}$ avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+3}}{\frac{(-1)^n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}(-1)\frac{n+2}{n+3}=-\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=-1$$

rezultă că dacă limita este diferită de 1 șirul este neconvergent.

277. Să se arate că dacă șirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent la a iar șirul $(b_n)_{n\in N}$ este convergent la b $(a,b\in\mathbb{R})$ atunci șirul $(\frac{a_n+b_n}{2})_{n\in N}$ este convergent la $\frac{a+b}{2}$.

Soluție Fie $C_n=a_n+b_n$. Folosind proprietățile operațiilor șirurilor convergente avem:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b\Rightarrow\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=a+b$$

deci $c_n\to a+b$.

Fie șirul dat de termenul general $d_n=\frac{c_n}{2}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{2}(a+b),\ \text{deci}\ \frac{a_n+b_n}{2}\to\frac{a+b}{2}.$$

278. Să se arate că pentru $a_n\to a$, $b_n\to b$, $(a, b\in\mathbb{R})$ avem

$a_n^2+b_n^2\to a^2+b^2$

Soluție Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^2=a^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^2=(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)^2=b^2$, deci

$$\lim_{n\to\infty}((a_n)^2+(b_n)^2)=\lim_{n\to\infty}(a_n)^2+\lim_{n\to\infty}(b_n)^2=a^2+b^2$$

279. Dacă suma a două șiruri de numere reale este un șir convergent, atunci rezultă că șirurile sînt convergente ?

Scanned with OKEN Scanner

Soluție Răspunsul este negativ deoarece $a_n=(-1)^n$ iar $b_n=(-1)^{n+1}$ nu sînt convergente pe cînd șirul sumă este convergent.

280. Dacă diferența șirurilor $(a_{n+p})_{n\in N}$, $p\in N$ și $(a_n)_{n\in N}$ este un șir convergent, rezultă că șirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent ?

R. Răspunsul este negativ deoarece dacă $a_n=\ln n$ atunci

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n+p}{n}\right)=0, \text{ iar } \lim_{n\to\infty}a_n=\infty.$$

281. Fie $(a_n)_{n\in N}$ un șir de numere reale.

a) Dacă $(a_n^{a_n})_{n\in N}$ este convergent rezultă că $(a_n)_{n\in N}$ este convergent ?

b) Dar dacă $(a_n^{a_{n+p}})_{n\in N}$, $\forall\, p\in\mathbb{R}$ este convergent rezultă că șirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent ?

R. Răspunsul este negativ pentru a) și b).

282. Să se calculeze ($n\in\mathbb{N}$):

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\ldots+n\cdot(n+3)}{C_{n+3}^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\left(1+\dfrac{2}{2n}\right)\ldots\left(1+\dfrac{2n}{2n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n^1\cdot C_n^2\ldots\cdot C_n^n}$

Soluție

a)
$$1\cdot4+2\cdot5+\ldots+n(n+3)=\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\,\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+5)}{3}\cdot\frac{6}{(n+3)(n+2)(n+1)}=2$$

b) Deoarece

$$a_n>\frac{1}{2n}+\frac{2}{2n}+\ldots+\frac{2n}{2n}=\frac{2n(2n+1)}{4n}=\frac{2n+1}{2}$$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n^n}{n!}=e\cdot\infty$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$

283. Să se afle limita șirului cu termenul general

$a_n = \alpha\sqrt{n} + \beta\sqrt{n+1} + \gamma\sqrt{n+2}$, $n\in\mathbb{N}$, unde α, β, γ sînt parametri reali.

Soluție Termenul general a_n poate fi transformat astfel:

$$a_n = \alpha\sqrt{n} + \beta(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \gamma(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + \beta\sqrt{n} + \gamma\sqrt{n} =$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\sqrt{n} + \beta(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \gamma(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) =$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\sqrt{n} + \frac{\beta}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + \frac{2\gamma}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

Dacă $\alpha + \beta + \gamma > 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Dacă $\alpha + \beta + \gamma = 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dacă $\alpha + \beta + \gamma < 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

284. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}}.$$

Soluție Fie șirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\alpha_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}$ și $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\beta_n = n\cdot\sqrt{n}$ atunci conform Teoremei Cesaro-Stolz avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\cdot\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\,[(n+1)\cdot\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}]}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{2}{3}$$

285. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{C_n^k}{n^k}$

Soluție $\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!\cdot n^{k-1}} =$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{n^{k-1} - (1+2+\ldots+(k-1))n^{k-2} + \ldots + (-1)(-2)\ldots(-k+1)}{k! \cdot n^{k-1}}$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}$

286. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Soluţie Deoarece

$$0 < \frac{n^2}{n!} = \frac{n^2}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} < \frac{n^2}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)},$$

$\forall\, n \geq 5$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$.

287. Pentru şirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termenul general $X_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

Soluţie Deoarece $k! < n!$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, rezultă că $1!+2!+\ldots+n! < n\cdot n!$ şi deci $0 < X_n < \frac{n\cdot n!}{(2n)!} = \frac{n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$.

Prin trecere la limită obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$.

288. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}\right)$$

Soluţie Aplicînd teorema Cesaro-Stoltz obţinem:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

şi aplicînd din nou teorema lui Cesaro-Stolz rezultă: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

289. Dacă $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \ln\sqrt{4n}$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Soluţie Deoarece

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = c$, punînd

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \ln 2n -$$

$$- \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2n - \ln\sqrt{n} - \ln\sqrt{4n}$$

avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c - \frac{c}{2} + \lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{2n}{2n} = \frac{c}{2}$.

290. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n^2-1} [\sqrt{i}]^2}{n^4}$ unde [x] este partea întreagă a lui x.

Soluţie Avem:

$$a_n = \sum_{i=2}^{n^2-1} [\sqrt{i}]^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k^2}^{k^2+2k} [\sqrt{i}]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k^2(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n-2} k^3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(3n^2-n-1)}{6}$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(3n^2-n-1)}{6n^4} = \frac{1}{2}$.

291. Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă

$a_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \ldots + \frac{1}{C_n^n}$, $\forall\, n \geq 1$.

Soluţie Deoarece $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ avem $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k!(n-k)!}{n!}$ deci

$$a_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)!(n-k)!}{n!}$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident însă, pentru, $\forall x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ avem: $\sum_{k=0}^{m} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_{m-k}$,

deci $a_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1-k)!k!(k+1)!}{n!}$ și deci

$$2a_n = 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)![(n-k)+(k+1)]}{n!} =$$

$$= 2 + \frac{n+1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!} = 2 + \frac{n+1}{n} a_{n-1} \text{ adică}$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_{n-1}, \forall n \geq 2.$$

Prin inducție relativ la n deducem că $2 \leq a_n \leq 2 + \frac{4}{n}$, $\forall n \geq 2$ deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

292. Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

$$a_n = \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n^{1936}+1} + \frac{1}{n^{1937}+2} + \ldots + \frac{1}{n^{1978}}\right), n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

Soluție Notînd $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ și ținînd seama că $\lim_{n\to\infty}(b_n - \ln n) = c$ (constanta lui Euler) rezultă că $\exists (d_n)_{n\geq 2}$ astfel încît $b_n = c + \ln(n) + d_n$ și $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. Deci:

$$a_n = \frac{1}{\ln n}(c + \ln n^{1978} + d_{n^{1978}} - c - \ln n^{1936} - d_{n^{1936}}) =$$

$$= \frac{1}{\ln n}(42 \ln n + d_{n^{1978}} - d_{n^{1936}}) = 42 + \frac{d_{n^{1978}} - d_{n^{1936}}}{\ln n}$$

de unde $\lim_{n\to\infty} a_n = 42$.

293. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\sqrt[n]{n^{2n+1}}}{n!}\right)^{\frac{n!}{e^n}}$.

Soluție Avem $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\sqrt[n]{n^{2n+1}}}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n^2\sqrt[n]{n}}{n!}\right)^{\frac{n!}{e^n}}$

Scanned with OKEN Scanner

Dar $\sqrt[n]{n} \to 1$ şi $\frac{n^2}{n!} \to 0$ rezultă că $\frac{n^2}{n!}\sqrt[n]{n} \to 0$ *iar* $\frac{n!}{e^n} \to \infty$.

Avem deci o limită de tipul 1^∞.

Aplicăm formula :

$\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ v\to\infty}} (1+u)^v = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(uv)}$, notînd $u = \frac{n^2}{n!}\sqrt[n]{n}$ şi $v = \frac{n!}{e^n}$, deci $uv = \frac{n^2}{e^n}\sqrt[n]{n}$.

Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{e^n}\sqrt[n]{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{e^n}\right) \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right) = 0 \cdot 1 = 0$.

Rezultă că: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n^{2n+1}}}{n!}\right)^{\frac{n!}{e^n}} = e^0 = 1$.

294. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n^{k-1} + \sqrt[k]{n}}} - \sqrt[k]{n}\right)$ unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Soluţie: Avem

$$\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n^{k-1} + \sqrt[k]{n}}} - \sqrt[k]{n} = \frac{\sqrt[k]{n^{k-1} + \sqrt[k]{n}}}{\sqrt[k]{\left(n + \sqrt[k]{n^{k-1} + \sqrt[k]{n}}\right)^{k-1}} + \ldots + \sqrt[k]{n^{k-1}}}$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n^{k-1} + \sqrt[k]{n}}} - \sqrt[k]{n}\right) = \frac{1}{k}$.

295. Să se arate că dacă şirul cu termenul general a_n are ca limită numărul a, iar şirul cu termenul general $B_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{2n}$, $b_n > 0$, are ca limită numărul b, atunci are loc:

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} \cdot b_{n+1} + a_{n+2} \cdot b_{n+2} + a_{2n} \cdot b_{2n}) = a \cdot b$

Soluţie Datorită ipotezelor, pentru orice $\epsilon > 0$, există un rang n_ϵ încît $n > n_\epsilon \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$ şi $|\beta_n| < \varepsilon$ unde $\alpha_n = a_n - a$ şi $\beta_n = b_n - b$. Deoarece şirurile convergente sînt în mod necesar şiruri mărginite, există un $A > 0$ încît $|a_n| \leq A$ şi $B_n \leq A$. Ţinînd seama de toate acestea avem:

$$c_n = a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \ldots + a_{2n} b_{2n} = ab + \alpha_{n+1}\beta_{n+1} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{2n} + a\beta_n$$

iar de aici, pentru $n > n_\epsilon$: $|c_n - a \cdot b| \leq (|\alpha_{n+1}| b_{n+1} + \ldots + |\alpha_{2n}| b_{2n}) + |a| \cdot |\beta_n| < \epsilon(b_{n+1} + \ldots + b_{2n}) + \epsilon|a| \leq \epsilon(A + |a|)$ fapt care dovedeşte afirmaţia.

Scanned with OKEN Scanner

$$|c_n - a\cdot b| \le (|\alpha_{n+1}|b_{n+1} + \ldots + |\alpha_{2n}|b_{2n}) + |a|\cdot|\beta_n| <$$

$$< \varepsilon(b_{n+1} + \ldots + b_{2n}) + \varepsilon\,|a| \le \varepsilon(A + |a|)$$

296. Aplicînd rezultatul de la exercițiul precedent să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n+1} + \sin\frac{\pi}{n+2} + \sin\frac{\pi}{2n}\right) = \pi \ln 2$$

Soluție Se știe că $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$. Notînd $B_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, pentru $b_n = \frac{1}{n}$ *si* $a_n = n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ obținem rezultatul cerut.

297. Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

Soluție Ne folosim de identitatea lui Botez:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$$

298. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Soluție

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right)\ldots\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\left[\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\ldots\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

De unde $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

299. Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

Scanned with OKEN Scanner

$$a_n = \left(n^2 - \sqrt{n^4 + n^2 + 1}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

R. Se amplifică cu conjugata expresiei $n^2 - \sqrt{n^4 + n^2 + 1}$ și se găsește:

$$a_n = \frac{-(n^2 + 1)}{n^2 + \sqrt{n^4 + n^2 + 1}} \sin \frac{\pi}{n} = -\pi \frac{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}\right)} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = -\pi$$

300. Să se calculeze limitele șirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a\sqrt{k} + b}{c\sqrt{k} + d}$, $a, b, c, d > 0$;

b) $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$ (Șirul lui Traian Lalescu);

c) $b_n = \sqrt[n]{tg \frac{n\pi}{2n+1}}$;

d) $c_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n}}$.

R. a) $\frac{a}{c}$; b) $\frac{1}{e}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1.

301. Calculați limitele șirurilor $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

a) $a_n = \frac{\ln(n) \cdot \ln(n!)}{n^n}$;

b) $a_n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n}$.

R. a) 0; b) 2.

302. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = \sum_{k=2}^{n} \log_{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$.

a) să se calculeze limita șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) să se calculeze limita șirului $(n \cdot \ln a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) 1; b) $2\log_{\frac{1}{3}} e$.

303. Să se determine constanta a astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(a^3+1)n} - \sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{2}.$$

R. $a = \sqrt[3]{15}$

304. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$, $x_0 + 1$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$, dacă există.

R. 0.

305. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$ în următoarele cazuri:

a) $a_n = \frac{2^n + 2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n}{3^n + 3\cdot 4^n + 5\cdot 5^n}$;

b) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{5^n} + \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{3\cdot 2^n + (-1)^n}{2^n}\right)$;

d) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^3}{n^2+1} \cdot \left(tg\,\frac{\pi}{4n}\right)^n$;

e) $a_n = \frac{3^{3n}}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^{3n}}$;

f) $a_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

g) $a_n = \frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$.

R. a) $\frac{3}{5}$; b) 1; c) 6; d) 0; e) $\frac{1}{e}$; f) Se folosește egalitatea $\sqrt{n^2+n} = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) + n$; $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$; g) 0.

Scanned with OKEN Scanner

306. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, dacă:

a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$;

b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)$.

R. a) $\frac{1}{4}$ (Se înmulțește fiecare paranteză cu conjugata)

b) $\frac{1}{9}$.

307. Să se calculeze cu ajutorul Teoremei Cesaro-Stolz limitele următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, $p\in\mathbb{N}$;

b) $a_n = \frac{1^p + 3^p + \ldots (2n-1)^p}{n^{p+1}}$, $p\in\mathbb{N}$;

c) $a_n = \frac{\ln n}{n^k}$.

R. *a)* $\frac{1}{p+1}$; *b)* $\frac{2^p}{p+1}$; *c)* 0.

308. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, $a>0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha-1}}$, $\alpha>0$.

R. a) ln a; b) α.

309. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 8^n}}$.

R. $\frac{1}{32}$.

Scanned with OKEN Scanner

310. Să se arate că:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3} = 0;\ b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)^n}{(2n)!} = 0;\ c)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} = 0.$

R.

a) Fie $x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^3}$; *atunci* $x_{n+1} = x_n \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3}$, deci $\exists n_0 \geq 1$ astfel încît $x_{n+1} \leq \frac{1}{2} x_n$, $\forall n \geq n_0$ și deci $0 < x_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} x_1$, $\forall\ n \geq n_0$.

b) Fie $x_n = \frac{(2n)^n}{(2n!)}$; *atunci* $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ deci $\exists\ n_0 \geq 1$ astfel încît $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}$, $\forall\ n \geq n_0$.

c) Utilizăm b) ținînd cont că $n! \leq n^n, \forall\ n \geq 1$.

311. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \ldots + n^n} = \infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n[(n+1)! + (n+2)!]}{(n+3)!} = 1$.

R. a) Avem $\sqrt[n]{1^n + 2^n + \ldots + n^n} \geq n$, $\forall\ n \geq 1$.

b) Se simplifică cu $(n+1)!$.

312. Să se determine limitele următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

b) $a_n = \frac{1}{n}\left[\frac{a+b}{c+d} + \frac{a\sqrt{2} + b}{c\sqrt{2} + d} + \ldots + \frac{a\sqrt{n} + b}{c\sqrt{n} + d}\right]$;

c) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}\right)$.

R. a) 0; b) $\frac{a}{c}$; c) 0 (Se aplică Teorema Cesaro-Stolz).

313. Să se calculeze limitele șirurilor următoare, date prin termenul general:

a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 - k^{-2}\right)$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k}$;

c) $a_n = n^p \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2 - 1}{k^2 + k - 6}$, *unde* $p \in \mathbb{R}$;

d) $a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}}{\sum_{k=0}^{n} 3^{-k}}$;

e) $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \cos \frac{(2k+1)\pi}{4n}$.

R. a) $-\ln 2$, b) 3, c) 20 dacă p=1, 0 dacă p<1 și ∞ dacă p>1, d) $\frac{4}{3}$, e) $1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$.

314. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} (a^n - b^n)$ știind că a, b ∈ N.

R. Dacă a=b atunci $\lim_{n\to\infty} (a^n - b^n) = 0$. Dacă a≠b avem

$$\lim_{n\to\infty} (a^n - b^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a = \max(a,b) \\ -\infty, & \text{dacă } b = \max(a,b) \end{cases}$$

315. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{an+b}{an+c}\right)^{n^k}$ unde a, b, c∈R, a≠0 și k∈N.

R.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{an+b}{an+c}\right)^{n^k} = \begin{cases} e^{\frac{b-c}{a}}, & \text{pentru } k = 1 \\ +\infty, & \text{pentru } k > 1 \text{ si } \frac{b-c}{a} > 0 \\ 0, & \text{pentru } k > 1 \text{ si } \frac{b-c}{a} < 0 \end{cases}$$

316. Calculați $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3n+5}{4n^2+8n+2}\right)^n$

R. $e^{\frac{3}{4}}$.

Scanned with OKEN Scanner

317. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^k}$ unde $k\in\mathbb{R}$.

R. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^k}=\begin{cases} e^0=1 \text{ pentru } k<\frac{1}{2} \\ e \quad \text{pentru } k=\frac{1}{2} \\ e^{\infty}=\infty \text{ pentru } k>\frac{1}{2} \end{cases}$

318. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2a^n+b^n}{3a^n+4b^n}$ ştiind că $a>0$, $b>0$.

R.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a^n+b^n}{3a^n+4b^n}=\begin{cases} \frac{2}{3} \text{ dacă } a>b \\ \frac{3}{7} \text{ dacă } a=b \\ \frac{1}{4} \text{ dacă } a<b \end{cases}$$

319. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n=\sqrt[n]{\frac{n\cdot\ln n}{n^{\ln n}}}$ pentru $n\to\infty$

b) $a_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n}}$ cu $n\geq 2$, pentru $n\to\infty$

R. a) Se notează $v_n=\frac{n\cdot\ln n}{n^{\ln n}}$ şi cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=1$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=1$

b) 1

320. Să se calculeze limitele şirurilor: $U_n=n^2\ln\cos\frac{\pi}{n}$ şi $V_n=n\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}\right)$ pentru $n\to\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

R. U_n se poate scrie $U_n = \ln\left(1 - \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)\right)^{n^2}$; limita este $-\frac{\pi}{2}$; $V_n = \ln n\left(1 - \left(tg\frac{\pi}{4} - tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{n}\right)\right)\right)^n$; limita este 2π.

321. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^2 + k - 2}{k(k+1)}$

R. Se observă că avem $k^2 + k - 2 = (k-1)(k+2)$.

Limita este $\frac{1}{3}$.

322. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{a}{a+b}\right)^n + \left(-\frac{a}{a+b}\right)^n + a\right) = a$, $\forall$ a,b > 0.

323. Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ un șir convergent de numere reale care are limita x. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{x}$.

324. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}}$.

R. $\frac{1}{2}$.

325. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$.

R. 0

326. Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ un șir definit astfel: 1,-2,-3,4,-5,-6,7,-8,-9,10,...

Atunci $(X_n)_{n\geq 1}$ nu are limită și $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ nu are limită.

Scanned with OKEN Scanner

327. Să se arate cu ajutorul criteriului monotoniei că seria lui Riemann (sau seria armonică generalizată) $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$.

Soluţie Putem scrie

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots = \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) +$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{2^{m\alpha}} + \frac{1}{(2^m+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^m+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}\right) + \ldots$$

şi dacă considerăm şirul sumelor parţiale S_p, cu $p = 2^{m+1} - 1$, avem:

$$S_p = \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m\alpha}} + \frac{1}{(2^m+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}\right)$$

$$S_p < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \ldots + \frac{2^m}{2^{m\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2\alpha-2}} + \ldots + \frac{1}{2^{m(\alpha-1)}}$$

$$S_p < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}, \text{ dacă } \alpha > 1.$$

Şirul sumelor parţiale fiind mărginit, seria este convergentă. (Pentru $\alpha = 1$, obţinem seria armonică care este divergentă).

328. Cu ajutorul primului criteriu de comparaţie să se arate că seria lui Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ cu $\alpha > 1$ este divergentă.

Soluţie Deoarece $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ cu $\alpha < 1$ şi seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ cu $\alpha < 1$ este divergentă.

329. Folosind primul criteriu practic să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Scanned with OKEN Scanner

este divergentă.

Soluție Deoarece $\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$, și seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă.

330. Arătați cu ajutorul criteriului rădăcinii că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ este convergentă.

Soluție Avem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{2} < 1$, deci seria este convergentă.

331. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)\cdot a^n}{n^n}$, $a>0$.

Soluție Aplicăm criteriul raportului

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, a^{n+1}}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}.$$

Deci, dacă $a<e$ seria este convergentă, iar dacă $a>e$ este divergentă.

Pentru $a=e$ criteriul raportului nu ne dă nici o indicație. Pentru $a=e$, avem $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Dar $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Atunci $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ sau $U_{n+1} > U_n$ și cum $U_1 > 1$, rezultă că termenul general al seriei nu tinde la zero, deci seria este divergentă.

332. Să se determine natura seriei:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{\left(\sqrt[3]{an^3+n^2+1}+\sqrt{2n^2+1}\right)^x},\ a>0,\ x\in\mathbb{R}.$$

R. Notăm:

$$U_n = \frac{n^2 \ln n}{\left(\sqrt[3]{an^3+n^2+1}+\sqrt{2n^2+1}\right)^x} = \frac{n^2 \ln n}{n^x\left(\sqrt[3]{a+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}\right)^x}$$

Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x-2}}$. Fie $V_n = \frac{\ln n}{n^{x-2}}$. Deoarece

$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt{2}\right)^x}$, atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x-2}}$ sînt de aceeași natură.

Pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x-2}}$ aplicăm criteriul logaritmic,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{V_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-2)\ln n - \ln(\ln n)}{\ln n} = x-2$$

Distingem cazurile:

a) $x>3$, seria este convergentă

b) $x<3$, seria este divergentă

c) $x=3$, atunci termenul general al seriei devine $V_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, dacă $n\geq 3$. În acest caz seria este divergentă.

333. Să se studieze natura seriei de termen general

$$U_n = (2n+1)\left(\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\right)^2,\ a\in\mathbb{R}.$$

Soluție Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{2(4a+1)n^2+2(5a+2)n-2a^2+2a+1}{(2n+3)(a+n+1)^2} = 4$$

Dacă $4a+1>1$, adică $a>0$, seria este convergentă.

Dacă $a<0$, seria este divergentă. Pentru $a=0$, $U_n = 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și deci seria în acest caz este convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

334. Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ este semiconvergentă.

Soluţie Va trebui să arătăm că seria dată este convergentă, dar nu este absolut convergentă. Să considerăm şirul modulelor termenilor seriei date. Avem: $U_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

$U_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = U_n$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$.

Deci şirul modulelor termenilor seriei date este descrescător şi convergent la 0. Conform criteriului lui Leibniz, seria va fi convergentă, seria modulelor este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Considerăm seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă.

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = 1$, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ este divergentă. De aici rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ nu este absolut convergentă.

335. Să se arate că seria lui Riemann alternantă

$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$ este convergentă pentru $\alpha > 0$.

Soluţie Deoarece şirul sumelor parţiale este descrescător şi convergent la 0, conform criteriului lui Leibniz, seria este convergentă.

336. Să se studieze natura seriilor următoare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ unde $x_n = 1$.

R. a) Seria nu este convergentă deoarece şirul sumelor parţiale nu are limită.

b) Seria este convergentă şi are suma 1 deoarece şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ converge la 1.

Scanned with OKEN Scanner

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}, \forall\, n \geq 1.$$

c) Seria este divergentă deoarece $S_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n \; \forall\, n \geq 1$ are limita $+\infty$.

337. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

R. Deoarece

$S_n = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$, $x \neq 1$. Rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1 - x}, \text{ daca } |x| < 1 \\ +\infty, \text{ daca } x > 1 \\ \nexists, \text{ daca } x < -1 \end{cases}$$

Deci seria este convergentă pentru $|x| < 1$, divergentă pentru $|x| > 1$. Dacă $x = 1$, $S_n = n$ și seria este divergentă.

338. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2}{n! + (n + 1)! + (n + 2)!}$ este convergentă și are suma $\frac{1}{2}$.

R. Se pune $\frac{n + 2}{n! + (n + 1)! + (n + 2)!} = \frac{1}{(n + 1)!} - \frac{1}{(n + 2)!}$.

339. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{n^2}$, $x \in R$.

R. Se arată că seria este absolut convergentă, deoarece $\frac{|\sin n x|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall\, n \in N$. Rezultă că seria este convergentă.

340. Să se arate că seria $1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 3^{n+1}} + \ldots$ este convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

R. Se observă că $\frac{1}{n \cdot 3^{n+1}} \leq \frac{1}{3^n}$, $n = 3,4,5,\ldots$ Folosind criteriul comparației, deoarece seria $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$ este convergentă, rezultă că și seria dată este convergentă.

341. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{lg^3 n}$ este convergentă.

R. Seria este convergentă conform criteriului lui Leibniz, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{lg^3 n} = 0$.

342. Se consideră seria $\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} \frac{1}{m^2 - n^2}$, unde m este un număr natural. Să se arate că seria este convergentă.

R. Seria este convergentă, deoarece toți termenii seriei, în afara unui număr finit au același semn și este comparabilă cu seria lui Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

343. Arătați că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sînt convergente și calculați sumele acestor serii.

R. Suma parțială a primei serii este $2 - \frac{n+2}{2^n}$, deci suma ei este 2, cea de-a doua are suma 6.

344. Să se arate că seria $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ este convergentă.

R. $S_n = \ln \frac{n+1}{2n}$.

345. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ este divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

R. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1), \forall\, n \geq 1$

și deci $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Prin urmare seria este divergentă.

346. Să se arate că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ este convergentă $\forall\, \alpha > 0$.

Soluție Sîntem în condiiţile criteriului lui Abel. Dacă luăm

$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ și $U_n = \sin n\alpha$, $n \in \mathbb{N}$,

$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin\left(\frac{n+1}{2} \cdot x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$. Prin urmare

sumele parţiale S_n sînt mărginite dacă $x \neq 2k\pi$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{n^\alpha}$ este convergentă $\forall\, \alpha > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV. LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE

IV.1. NOȚIUNEA DE LIMITĂ. LIMITE LATERALE. OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII. CRITERII

347. Să se arate, folosind definiția limitei într-un punct că: $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Soluție Vom arăta că pentru $\forall \epsilon>0$, $\exists\ \delta(\epsilon)>0$, astfel încît pentru $\forall x$, satisfăcînd inegalitatea $|x-2|<\delta$, să avem $|x^2-4|<\epsilon$.
Presupunem că $|x-2|<\delta, \leftrightarrow -\delta < x-2 < \delta \leftrightarrow 2-\delta < x < 2+\delta$.
Însă $|x+2| \le |x| + 2$ și din inegalitatea $-2-\delta < 2-\delta < x < 2+\delta$ deducem: $|x| < 2+\delta$, $|x|+2 < 4+\delta$, deci
$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)|$, $|x+2| \le |x-2|$, $(|x|+2)<\delta(4+\delta)$. Fiind dat $\epsilon>0$ arbitrar, dacă $\delta(4+\delta)\le\epsilon$, atunci și $|x^2-4|<\epsilon$. Însă $\delta(4+\delta)\le\epsilon$ dacă $0<\delta\le -2+\sqrt{4+\epsilon} = \dfrac{\epsilon}{2+\sqrt{4+\epsilon}}$.

348. Aplicînd definiția limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul șirurilor, să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+2x+3}$.

Soluție Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir cu proprietatea că $x_n \to 1$, atunci $x_n^2 \to 1$ și $2x_n \to 2$, deci $f(x_n) = \sqrt{x_n^2+2x_n+3} \to \sqrt{1+2+3} = \sqrt{6}$, deci $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \sqrt{6}$.

349. Aplicînd definiția limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul șirurilor, să se calculeze: $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3+5x-21}$.

Soluție Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir cu proprietatea că $x_n \to -1$, atunci $5x_n \to -5$ și avem: $f(x_n) = \sqrt[3]{x_n^3+5x_n-21} \to \sqrt[3]{-1-5-21} = \sqrt[3]{-27} = -3$, deci $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -3$.

350. Folosind definiția să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie Vom arăta că pentru $\forall\ \epsilon>0$ dat, $\exists\ \delta(\epsilon)>0$ astfel încît pentru orice $x>\delta(\epsilon)$ să avem $\frac{1}{x^2+1}<\epsilon$. Din inegalitatea $\frac{1}{x^2+1}<\epsilon$ obţinem $x^2+1>\frac{1}{\epsilon}\to x^2>\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\to x>\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$. Deci

$$\delta(\epsilon)=\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}},\quad \epsilon\le 1.$$

Dacă $\epsilon>0$, $\frac{1}{x^2+1}<\epsilon$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

351. Să se arate cu ajutorul definiţiei că $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$ dacă $a\neq 0$.

Soluţie Într-adevăr, dacă luăm $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{x-a}{xa}\right|$, atunci, pentru $\forall\ \epsilon>0$, $|x-a|<\delta\le\frac{\epsilon a^2}{2}$, dacă $x\neq 0$, $a\neq 0$.

352. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(x)$ nu are limită cînd x tinde către infinit.

Soluţie Vom arăta că pentru şiruri diferite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n\to\infty$, obţinem pentru şirurile $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ corespunzătoare limite diferite. Într-adevăr, fie $x_n=n\pi$; $f(x_n)=\sin(n\pi)=0$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$. Pentru şirul $x'_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=\infty$. Însă oricare ar fi n, $f(x'_n)=1$, deci şi $\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=1$.

353. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, nu are limită în punctul $x=0$.

Soluţie Alegem şirurile $x'_n=\frac{1}{n\pi}$ şi $x''_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n\ge 1$ care converg către zero şi totuşi $f(x'_n)=\sin\left(\frac{1}{x'_n}\right)=\sin n\pi\to 0$,

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x''_n) = \sin \frac{1}{x''_n} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \to 1.$$

354. Folosind definiţia limitei într-un punct, să se demonstreze că:

a). $\lim\limits_{x \to 3} x^3 = 27$

b). $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{x} = -1$

c). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+1}{x-1} = -1$

355. Să se arate că orice funcţie constantă $f:E \to \mathbb{R}$ cu valoarea c, are limită în orice punct x_0 de acumulare pentru E şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

356. Să se arate că funcţia $f(x) = e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$, $x \neq 1$ are limită în punctul $x_0 = 1$.

Soluţie $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} e^{\frac{1}{(x-1)^2}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} e^{\frac{1}{(x-1)^2}} = +\infty$

357. Să se arate că funcţia $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ nu are limită în punctul $x_0 = 0$.

Soluţie $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1.$

Cum $l_s = -1 \neq l_d = 1$ rezultă că f(x) nu are limită în $x_0 = 0$.

358. Se dă funcţia $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, & x<0 \\ (1 + tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}, & x>0 \end{cases}$. Să se cerceteze dacă

Scanned with OKEN Scanner

funcţia f are limită în $x_0 = 0$.

Soluţie Calculăm limitele laterale ale funcţiei în punctul $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \left[1 + \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x}}$$

$$\text{Dar } \lim_{x\searrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x} = -\lim_{x\searrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = -\frac{3}{2},$$

deci $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = e^{-\frac{3}{2}}$.

$$\lim_{x\searrow 0} (1 + tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\searrow 0} \left[(1 + tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{tg^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{1}{2}\left(\frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}}$$

De unde rezultă $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) \neq \lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$, deci, funcţia nu are limită în punctul $x_0 = 0$.

359. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi - x}}$.

Soluţie Limita din enunţ se încadrează în cazul operaţiilor fără sens de tipul $\frac{0}{0}$.

Dacă notăm $\pi - x = y$, se observă că $y > 0$ şi $y \to 0$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi - x}} = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} \frac{\sin(\pi - y)}{\sqrt{y}} = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} \left(\frac{\sin y}{y} \cdot \sqrt{y}\right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

360. Să se calculeze limita funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de legea:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}, \text{ în punctul } x_0 = 0.$$

Soluţie $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} e^x = 1;$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \cos(x) = 1,$$

Deci $l_s = l_d = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Funcţia f are limită în $x_0 = 0$ şi este egală cu 1.

Scanned with OKEN Scanner

361. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{tg\,x - x}{x^2}$.

Soluţie Avem

$$0 < \frac{tg\,x - x}{x^2} < \frac{tg\,x - \sin x}{x^2} < \frac{tg\,x(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{tg\,x}{x} \cdot \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x}$$

Însă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{tg\,x}{x} = 1$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = 0$.

Rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{tg\,x - x}{x^2} = 0$.

S-a folosit rezultatul că pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ avem $\sin x < x < tg\,x$.

362. Să se determine α astfel încît funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x + 2}}, & \text{pentru } x > 1 \\ \dfrac{tg\,[\alpha(x - 1)]}{\sin\,[2(x - 1)]}, & \text{pentru } x < 1 \end{cases}$$

, să aibă limită în $x_0 = 1$.

Soluţie

$$\lim_{x\to 1} \frac{tg[\alpha(x - 1)]}{\sin[2(x - 1)]} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{\alpha\, tg[\alpha(x - 1)]}{\alpha(x - 1)}}{2 \cdot \dfrac{\sin[2(x - 1)]}{2(x - 1)}} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left\{ \frac{(2x - \sqrt{x^2 + 3})(2x + \sqrt{x^2 + 3})}{(\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x + 2})(\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x + 2})} \cdot \frac{\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x + 2}}{2x + \sqrt{x^2 + 3}} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \left[\frac{3(x^2 - 1)}{1 - x} \cdot \frac{\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x + 2}}{2x + \sqrt{x^2 + 3}} \right] = -6$$

Rezultă că $\dfrac{\alpha}{2} = -6 \Rightarrow \alpha = -12$..

Deci pentru $\alpha = -12$ funcţia f(x) are limită în punctul $x_0 = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

363. Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} \dfrac{\sqrt{\ln\left|(\sin x)^{-1}\right|}}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Soluţie Făcînd substituţia $x-\frac{\pi}{2}=y$ obţinem:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{\sqrt{-\ln|\cos y|}}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \sqrt{\frac{-\ln\cos y}{\cos y-1}\cdot\frac{\cos y-1}{y^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

364. Fie funcţia $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}}$. Funcţia f are limită în punctul $x_0=2$?

Soluţie

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{1}{1+e^{\lim\limits_{x\searrow 2}\frac{1}{x-2}}}=\frac{1}{1+e^{\infty}}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{1}{1+e^{\lim\limits_{x\nearrow 2}\frac{1}{x-2}}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=1$$

Funcţia nu are limită în punctul $x_0=2$.

365. Să se cerceteze dacă funcţia parte întreagă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[-x]$ are limită în punctul $x_0=2$.

Soluţie

$$[-x]=\begin{cases} -3, & \text{dacă } -x\in[-3,-2), \text{ adică } x\in(2,3] \\ -2, & \text{dacă } -x\in[-2,-1), \text{ adică } x\in(1,2] \end{cases}$$

$$\lim_{x\searrow 2}[-x]=-2,\quad \lim_{x\nearrow 2}[-x]=-3.$$

Rezultă că funcţia nu are limită în $x_0=2$

366. Să se calculeze $\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{\sin(\lambda\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, unde $\lambda\in\mathbb{R}$.

Soluţie Avem $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$.

Să notăm $y=\arccos(x)$, $x\in[-1,1]$. Atunci $x=\cos(y)$, $y\in[0,\pi]$. Avem $x\nearrow 1 \leftrightarrow y\searrow 0$. Prin urmare:

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{x\nearrow 1}\frac{\sin(\lambda\ \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{y\searrow 0}\frac{\sin\lambda y}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\lim_{y\searrow 0}\frac{\sin\lambda y}{\sin y}=\lambda$$

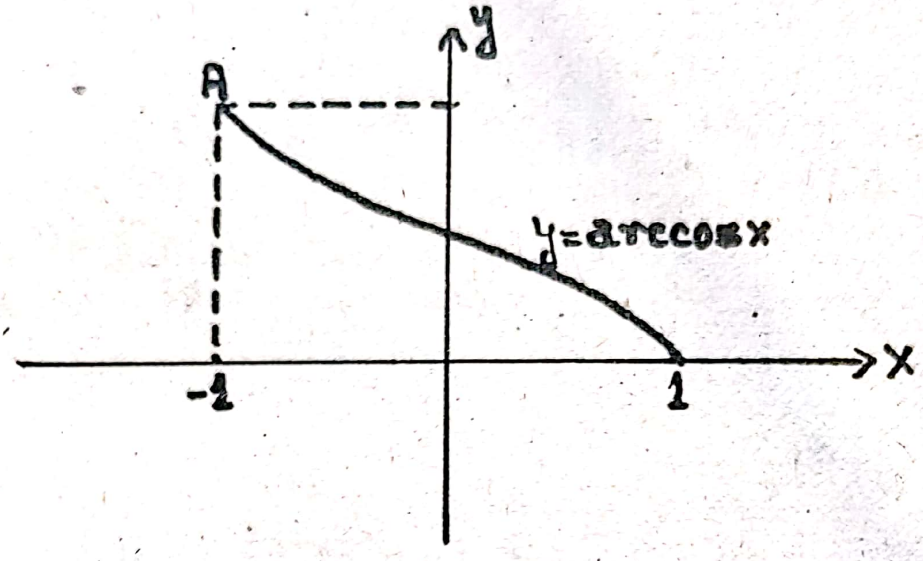


Fig. 13.

367. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} arctg\ \frac{1}{1-x}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} arctg\ \frac{1}{1-x}$.

Soluție

a) Notăm $\frac{1}{1-x}=tg\ t$, *unde* $tg\ t\to+\infty$ cînd $x\to 1$ și $x<1$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,

atunci $t=arctg\ \frac{1}{1-x}\to\frac{\pi}{2}$, *deci* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} arctg\ \frac{1}{1-x}=\frac{\pi}{2}$.

b) $tg\ t\to-\infty$ cînd $x\to 1$ și $x>1$.

Obținem: $t=arctg\ \frac{1}{1-x}\to-\frac{\pi}{2}$, *deci* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} arctg\ \frac{1}{1-x}=-\frac{\pi}{2}$.

368. Să se calculeze $\lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^A$, *unde* $A=\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \frac{\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 1 - \left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

Deci $\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)^A = \left\{\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right]^{-\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}}\right\}^M$, unde

$M = -2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right).A.$

Dar

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{x - \frac{\pi}{4}}} = 2 \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

De unde $l_d = e^0 = 1$.

369. Să se găsească limitele laterale ale funcţiilor:

$f(x) = \frac{1 + |\cos x|}{\sin |x|}$, în punctul $x_0 = \pi$;

$g(x) = \frac{x - 2}{x + 2} e^x$, în punctul $x_0 = -2$.

R. Pentru ambele funcţii $l_s = +\infty$ şi $l_d = -\infty$

370. Să se determine limitele laterale în punctul $x_0 = 1$ pentru funcţiile $f: D \to \mathbb{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiţie) următoare:

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$

Scanned with OKEN Scanner

c) $f(x) = e^{\frac{1}{|x^2-1|}}$

d) $f(x) = e^{\frac{x^2-2}{x-1}}$

R. a) $l_s = 0$, $l_d = \infty$;
b) $l_s = 0$, $l_d = \infty$;
c) $l_s = l_d = \infty$;
d) $l_s = \infty$, $l_d = 0$.

371. Să se calculeze limitele laterale ale funcţiilor de mai jos în punctele indicate:

a) $f: \mathbb{R}-\{-5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4}{x+5}$, $x_0 = -5$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-3}}}, & \text{dacă } x \neq 3 \\ 2, & \text{dacă } x = 3 \text{ în } x_0 = 3 \end{cases}$

c) $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$, $x_0 = 0$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{(x+1)^2} & \text{dacă } x \neq 1 \\ 7 & \text{dacă } x = -1 \end{cases}$, $x_0 = -1$

R. a) $l_s = -\infty$, $l_d = +\infty$;
b) $l_s = 1$, $l_d = 0$;
c) $l_s = l_d = +\infty$
d) $l_s = l_d = +\infty$

372. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - \cos x)^{\operatorname{ctg} x}$.

R. $l_d = 0^{+\infty} = 0$

373. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{x}}$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

R. a) 0; b) $+\infty$; c) 1; d) 0

374. Să se determine λ astfel încît $f(x) = \begin{cases} \lambda \ln(x+2), \forall x > 0 \\ [x], \forall x < 0 \end{cases}$ să aibă limită în punctul $x_0 = 0$.

R. $l_d = \lambda \ln 2$; $l_s = -1$; $\lambda = -\dfrac{1}{\ln 2}$.

375. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încît funcția

$f(x) = \begin{cases} \sin x, \forall x \geq 0 \\ ax + b, \forall x < 0 \end{cases}$ să aibă limită în punctul $x_0 = 0$.

R. $l_s = b$; $l_d = 0$; $b = 0$.

376. Calculaţi limitele funcţiilor următoare:

a) $\lim\limits_{x\searrow 0} x \ln x$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} \dfrac{1}{\ln x - 1}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - e}$;

d) $\lim\limits_{x\searrow \frac{\pi}{4}} e^{\frac{1}{tg\, x - 1}}$.

R. a) 0; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$

377. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie Nu putem calcula direct $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ deoarece obţinem 0/0. Totuşi pentru $x \neq 1$ avem:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+\lim_{x\to 1}x=2.$$

378. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^{x-1}+\sqrt[3]{x^5}}{(x+2)^{x+3}}\right]^{\ln x}$.

Soluţie

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^{x-1}+\sqrt[3]{x^5}}{(x+2)^{x+3}}\right]^{\ln x}=\left[\lim_{x\to 2}\frac{x^{x-1}+\sqrt[3]{x^5}}{(x+2)^{x+3}}\right]^{\lim\limits_{x\to 2}\ln x}=\left[\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^{x-1}+\sqrt[3]{x^5})}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)^{x+3}}\right]^{\ln 2}=$$

$$=\left\{\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^{x-1}+\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x^5}}{[\lim\limits_{x\to 2}(x+2)]^{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)}}\right\}^{\ln x}=\left[\frac{2^{2-1}+\sqrt[3]{2^5}}{4^5}\right]^{\ln 2}=\left(\frac{1+\sqrt[3]{4}}{2^9}\right)^{\ln 2}$$

379. Să se determine limita funcţiei

$f(x)=\sqrt[3]{ax^3+x^2+bx+c}-(bx+c)$ cînd $x\to\infty$; $a, b, c\in\mathbf{R}_+^*$.

Soluţie $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty-\infty$.

Pentru a elimina nedeterminarea, f(x) se poate scrie:

$$f(x)=\frac{(a-b^3)x^3+(1-3b^2c)x^2+(b-3bc^2)x+c-c^3}{\sqrt[3]{(ax^3+x^2+bx+c)^2}+\sqrt[3]{(ax^3+x^2+bx+c)(bx+c)}+\sqrt[3]{(bx+c)^2}}$$

rezultînd următoarele:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{dacă } a>b^2\\ -\infty, & \text{dacă } a<b^2\\ \dfrac{1-3b^2c}{3b^2}, & \text{dacă } a=b^2 \text{ şi } 1-3b^2c\neq 0\\ 0, & \text{dacă } a=b^2 \text{ şi } c=\dfrac{1}{3b^2}\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

380. Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x^2-5)$

Soluţie Avem o nedeterminare de tipul $\infty-\infty$. Putem elimina nedeterminarea scoţînd forţat în factor pe x^3. Avem

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2-5)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^3\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}\right)=$$

$$=(-\infty)^3\cdot\left(1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-5\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}\right)=-\infty\cdot(1+0-5\cdot0)=-\infty$$

381. Fie funcţia $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{4x}$. Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

Soluţie Deoarece $|\sin x|\le 1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, obţinem $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

382. Să se arate că pentru funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=(2+\sin x)\ln x$ avem $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

Soluţie Deoarece $-1\le\sin x$,, $(2+\sin x)\ln x\ge(2-1)\ln x=\ln x$, pentru $x\ge1$. Însă $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=+\infty$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\sin x)\ln x=+\infty$.

383. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn}x$ nu satisface criteriul Cauchy-Bolzano în punctul $x_0=0$.

Soluţie Fie $\epsilon_1=2$. Oricare ar fi $\delta>0$, $\exists$ n astfel încît $\dfrac{1}{n}<\delta$.

Fie $x'=\dfrac{1}{n}$, $x'=-\dfrac{1}{n}$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $|f(x) - f(x)| = |sgn\ \frac{1}{n} - sgn\ (-\frac{1}{n})| = 2.$

384. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x-1) = -4x^3 + 12x^2 - 9x + 1$ şi funcţiile $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\ ori})(\sin x)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $a_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g_n(x)}{x}$ şi $\lim\limits_{x\to 0} [a_n \cdot \sin \frac{\pi}{a_n}]$.

Soluţie Dacă înlocuim x cu x+1 obţinem $f(x) = -4x^3 + 3x$ şi deci $g_1(x) = f(\sin x) = -4\sin^3 x + 3\sin x = \sin 3x$, iar prin inducţie obţinem:

$$g_n(x) = \sin 3^{nx}$$

$$a_n = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3^{nx}}{x} = 3^n,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*;$$

deci $\lim\limits_{x\to 0} a_n \sin \frac{\pi}{a_n} = \lim\limits_{x\to 0} 3^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n} = \pi.$

IV.2. ASIMPTOTELE FUNCŢIILOR REALE

385. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5x^5 + 3}{x^4 - 1}$. Să se afle asimptotele verticale şi oblice.

Soluţie $D = \mathbb{R}-\{-1,1\}$. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{5x^5 + 3}{x^4 - 1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^5 + 3}{x^4 - 1} = +\infty$,

deci $x = -1$ şi $x = 1$ sînt asimptote verticale.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^5 + 3}{x^5 - x} = 5;$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [\, f(x) - mx \,] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{5x^5 + 3}{x^4 - 1} - 5x \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{5x + 3}{x^4 - 1} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

De unde rezultă că $y = 5x$ este asimptotă oblică.

386. Studiaţi asimptota oblică a funcţiei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$

Soluţie

Asimptota oblică a lui f spre $+\infty$ este dreapta $y = x - 3$ deoarece

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - mx \,] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x + 3} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{x + 3} = -3$$

Deoarece $x \in (0, +\infty)$, f nu are asimptotă oblică spre $-\infty$.

387. Fie funcţia $f(x) = c_1\sqrt{a^2 + x^2} + c_2 |b - x|$ cu $a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ fixaţi. Să se afle asimptotele funcţiei f.

Soluţie $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2(c_1^2 - c_2^2) + 2bc_2^2x + a^2c_1^2 - b^2c_2^2}{xc_1\sqrt{a^2 + x^2} - xc_2|b - x|}$

Dacă $c_1 = -c_2 \neq 0$ atunci avem asimptote orizontale $y = -bc_1$ la $-\infty$ şi $y = bc_1$ la $+\infty$.

Dacă $c_1^2 = c_2^2$ atunci avem asimptote oblice $y = -(c_1 + c_2)x + bc_2$ la $-\infty$ şi $y = (c_1 + c_2)x - bc_2$ la $+\infty$.

388. Precizaţi asimptota orizontală a funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3 \text{ dacă } x \leq 1 \\ 2x^2 \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$$

Soluţie Funcţia f are asimptota orizontală $y = 3$ spre $-\infty$ dar nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$, conform graficului de pe pagina următoare.

389. Să se arate că dacă P, Q sînt funcţii polinomiale reale şi $gr\,P - gr\,Q = 1$, atunci funcţia raţională $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ are asimptotă oblică spre $+\infty$ şi spre $-\infty$ dreapta $y = ax + b$, unde $ax + b$ este cîtul lui P prin Q.

Scanned with OKEN Scanner

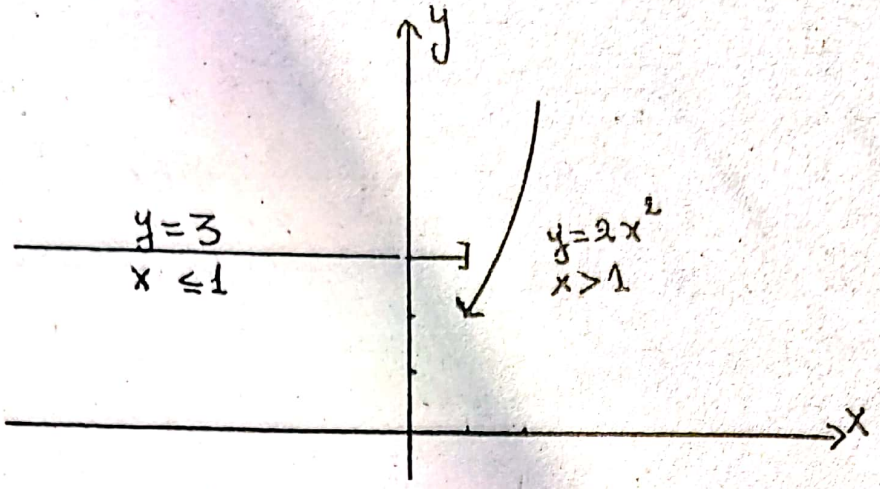


Fig. 14.

Soluție $P(x) = (ax + b)Q(x) + r$, $r \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{P(x)}{Q(x)} - (ax+b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{r}{Q(x)} = 0.$$

390. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unde $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{1+x}}$, $a \in \mathbb{R}$.

Să se găsească asimptotele la graficul funcției f.

Soluție

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 + ax + 5 - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+ax+5)^2 - x^2(x^2+1)}{(x^2+ax+5+x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = a$$

Deci $y = x + a$ este asimptota oblică spre $+\infty$. Avem

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = -1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) + x] = -a$ deci $y = -x - a$ este asimptota oblică la ramura spre $-\infty$.

391. Să se determine asimptotele pentru următoarele funcții $f : D \to \mathbb{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; c) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x)(x^2+9)}$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$; e) $f(x) = \frac{x}{|x+1|}$; f) $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$;

g) $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-5)}$; h) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$; i) $f(x) = \frac{x+|x|}{x-|x|}$;

j) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2}$; k) $f(x) = \frac{x^2}{|x-1|}$;

l) $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2}$; $x \neq 1$, $f(1) = 5$.

Soluție

a) $y = 2$ este o asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$;

b) $x = -1$, $x = 1$, asimptote verticale; $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$;

c) $x = 0$, $x = -2$, asimptote verticale; $y = 0$ asimptotă orizontală;

d) $x = 0$ asimptotă verticală; $y = 0$ asimptotă orizontala spre $+\infty$;

e) $x = -1$ asimptotă verticală; $y = -1$ și $y = 1$ asimptote orizontale spre $-\infty$ și spre $+\infty$;

f) $x = -2$ asimptotă verticală; $y = -1$, $y = 1$ asimptote orizontale spre $-\infty$ și spre $+\infty$;

g) $x = 1$, $x = 5$ asimptote verticale; $y = 0$ asimptotă orizontală;

h) $x = 0$ asimptotă verticală; $y = x + 1$ asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$;

i) $D = (-\infty, 0)$ și $f(x) = 0, \forall x \in D$. În acest caz $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$;

j) $x = 0$ verticală; $y = 1$ orizontală spre $-\infty$ și $+\infty$;

k) $x = 1$ verticală; $y = x + 1$ oblică spre $+\infty$ și $y = -x - 1$ oblică spre $-\infty$;

l) $D = \mathbb{R}$. Funcția nu are asimptote.

392. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+1} & \text{dacă } x < -1 \\ 2 & \text{dacă } x \geq -1 \end{cases}$

Să se precizeze asimptotele funcției f.

R. f are asimptota oblică $y = x - 1$ spre $-\infty$, asimptota orizontală $y = 2$ spre $+\infty$ și asimptota verticală la stînga $x = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

393. Arătaţi că pentru $\forall a \in \mathbb{R}$, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ are asimptota verticală $x = 0$.

394. Determinaţi asimptotele următoarelor funcţii:

a) $f : (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{2x+3}}$

b) $f : \mathbb{R} - \{-3, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-3}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max[x^2, (x + |x-1|^2)]$

d) $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| e^{\frac{1}{|x-2|}}$

e) $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x-1|x + (x-1)|x|}{x^2-1}$

f) $f : (-\infty, -1) \cup (-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \pm\frac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$

g) $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

R.

a) Asimptota verticală este $x = -\frac{3}{2}$; asimptota oblică spre $+\infty$, dreapta $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 5\frac{\sqrt{2}}{4}$. Asimptota oblică spre $-\infty$ aceeaşi dreaptă; nu are asimptote orizontale;

b) $y = 0$, asimptótă orizontală spre $+\infty$ şi $-\infty$; dreptele $x = -3$ şi $x = 1$ sînt asimptote verticale;

c) Nu avem asimptote;

d) $x = 2$, asimptotă verticală; $y = -x + 1$ asimptota oblică la ramura $-\infty$; $y = x - 1$, asimptota oblică la ramura $+\infty$;

e) $y = -2$, asimptota orizontală la $-\infty$; $y = 2$, asimptota orizontală la $+\infty$; $x = -1$, asimptota verticală;

f) $x = -1$, asimptota verticală;

g) $x = -1$ asimptota verticală; $y = 1$, asimptotă orizontală.

Scanned with OKEN Scanner

395. Determinaţi asimptotele curbelor de ecuaţii:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ *R.* asimptotă orizontală $y = 0$

asimptotă verticală $x = -3$; $x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$ *R.* asimptotă verticală $x = 1$

asimptotă oblică $y = 2x+3$

c) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ *R.* asimptotă verticală $x = 1$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ *R.* asimptotă orizontală $y = 1$

asimptotă verticală $x = -1$

e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

R. asimptote verticale $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

f) $f(x) = \ln(x^2-1)$ *R.* asimptote verticale $x = \pm 1$

g) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ *R.* asimptotă orizontală $y = 1$

asimptotă verticală $x = 0$

396. Studiaţi asimptotele funcţiilor

a) $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}$; b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$

R. a) f fiind funcţie periodică, pe intervalul $(0\ ,\ 2\pi)$ are $x = 0$ şi $x = 2\pi$ asimptote verticale.

b) Pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ este asimptotă verticală.

397. Să se determine numerele reale a , b dacă dreapta $y = 2x+3$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru funcţiile $f : D \to \mathbb{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiţie) următoare:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2+ax+b}{x+1}$; b) $f(x) = \dfrac{x+|x^2-1|}{ax+b}$; c) $f(x) = \dfrac{4x^2+ax+1}{bx+1}$

R. a) $a = 5$, b nedeterminat;

Scanned with OKEN Scanner

b) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$;

c) $a = 8$, $b = 2$.

398. Să se indice o funcţie reală avînd ca asimptote toate dreptele $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

R. $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$.

IV.3. LIMITE DE FUNCŢII

399. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to -2} (2x^3 - x^2 + x - 1)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (x^9 + 3x^7 + x - 6)$

Soluţie

a) $\lim\limits_{x \to -2} (2x^3 - x^2 + x - 1) = 2(-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 1 = -25$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (x^9 + 3x^7 + x - 6) = 0^9 + 3 \cdot 0^7 + 0 - 6 = -6$

400. Care sînt limitele următoarelor funcţii polinomiale ?

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - x^2 + 2x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x + 5)$

Soluţie

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \left(3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^4}\right) = \infty^4 (3 - 0 + 0 + 0) = \infty \cdot 3 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 \left(3 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^4}\right) = (-\infty)^4 \cdot 3 = +\infty$

401. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 5x + 7)$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^9 + 2x^7 - x^3 + x - 2)$

Soluție

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 5x + 7) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-\frac{1}{2}x^4) = -\frac{1}{2}(-\infty)^4 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^9 + 2x^7 - x^3 + x - 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^9) = 3 \cdot (\infty^9) = +\infty$

402. Fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ și $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$ cu $a_n, b_m \neq 0$ (P și Q polinoame reale).

Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} [P(x)]^k \cdot [Q(x)]^l$ unde $k, l \in \mathbb{N}^*$.

Soluție $[P(x)]^k \cdot [Q(x)]^l = [a_n^k x^{kn} + N(x)] \cdot [b_m^l x^{ml} + R(x)]$ unde $\text{gr } N(x) < kn$ și $\text{gr } R(x) < ml$.

$$\lim_{x \to +\infty} [P(x)]^k \cdot [Q(x)]^l = \lim_{x \to +\infty} a_n^k b_m^l x^{kn+ml} =$$

$$= (+\infty)^{kn+ml} \text{ sign } (a_n^k \cdot b_m^l)$$

403. Să se calculeze limitele următoarelor funcții polinomiale:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 13x^2 - 2x^7)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax^2 + bx^\alpha + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot b \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{N}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (0{,}5x^4 + 0{,}5x - 3)$

R a) $+\infty$; b) $a \cdot (+\infty)$ dacă $\alpha < 2$; $(a+b) \cdot (+\infty)$ dacă $\alpha = 2$; $b \cdot (+\infty)$ dacă $\alpha > 2$; c) -2.

404. Fie polinoamele $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 5x + 1$ și $Q(x) = (m+1)x^3 + 5x$, $m \in \mathbb{R}$. Pentru ce valoare a lui m, $\lim\limits_{x \to +\infty} [P(x) + Q(x)] = -\infty$?

R . $P(x) + Q(x) = (m-2)x^3 + 2x^2 + 10x + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [P(x) + Q(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} (m-2)x^3 = (m-2)\infty^3 = (m-2)\infty = -\infty$ dacă $m - 2 < 0$, adică $m < 2$.

Scanned with OKEN Scanner

405. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, $m, n \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

Soluție

a) $(1+mx)^n = 1 + mnx + \dfrac{n(n-1)}{2} m^2x^2 + \ldots + m^n x^n$

$(1+nx)^m = 1 + nmx + \dfrac{m(m-1)}{2} n^2x^2 + \ldots + n^m x^m$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{mn}{2}(n-m)x^2 + C_n^3(mx)^3 - C_m^3(nx)^3 + \ldots}{x^2}$$

$$= \frac{mn}{2}(n-m)$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x^2+2x+3} = \dfrac{1}{2}$

406. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n + (2n-7)x^{n-1} - 2(n-2)x^{n-2} + x + 1}{(x-1)^2}$.

Soluție Notînd $x - 1 = y$, cînd $x \to 1$, $y \to 0$, limita devine:

$$\lim_{y \to 0} \frac{(y+1)^n + (2n-7)(y+1)^{n-1} - 2(n-2)(y+1)^{n-2} + y + 2}{y^2}$$

În polinomul de la numărătorul fracției de mai sus, termenul liber este: $1 + (2n-7) \cdot 1 - 2(n-2) \cdot 1 + 2 = 0$, coeficientul lui y este:

$$C_n^{n-1} + (2n-7)C_{n-1}^{n-2} - 2(n-2)C_{n-2}^{n-3} + 1 =$$
$$= n + (2n-7)(n-1) - 2(n-2)^2 + 1 = 0$$

iar coeficientul lui y^2 este

$$C_n^{n-2} + (2n-7)C_{n-1}^{n-3} - 2(n-2)C_{n-2}^{n-4} = C_n^2 + (2n-7)C_{n-1}^2 -$$
$$- 2(n-2)C_{n-2}^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(2n-7)(n-1)(n-2)}{2} -$$
$$- 2\frac{(n-2)^2(n-3)}{2} = -(n^2 - 4n + 3)$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că limita din enunț este egală cu $-n^2+4n-3$.

407. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x+\sqrt{x}-6}$.

Soluție Funcția poate fi transformată într-o funcție rațională cu substituția $\sqrt{x}=t$. Pentru $x\to 4$, $t\to 2$. avem:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{x+\sqrt{x}-6}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2+t-6}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+3)}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+4}{t+3}=\frac{12}{5}$$

408. Dacă x este un număr real cu $|x|<1$, să se calculeze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+6x+12x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}}{1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}}$$

Soluție Fie $f(x)=x+x^2+\ldots+x^n=x\left(\dfrac{1-x^n}{1-x}\right)$, $x\neq 1$.

Cum f este o funcție polinomială, este derivabilă, deci:

$$f'(x)=1+2x+\ldots+nx^{n-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\to\lim_{n\to+\infty}f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x)=2+6x+12x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}=$$

$$=\frac{-n(n+1)x^{n+2}+(n^2+3n-2)x^{n+1}+(n^2-3n+2)x^n}{(1-x)^4}-$$

$$-\frac{n(n-1)x^{n-1}-2(1-x)}{(1-x)^4}\to\lim_{n\to+\infty}f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$$

Deci

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2+6x+12x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}}{1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f''(x)}{f'(x)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}f''(x)}{\lim\limits_{n\to+\infty}f'(x)}=\frac{\dfrac{2}{(1-x)^3}}{\dfrac{1}{(1-x)^2}}=\frac{2}{1-x}$$

Scanned with OKEN Scanner

409. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2x-3)^{51} \cdot (-x+1)^9}{(3x^2+2)^{25} \cdot (5x+3)^{10}}$.

Soluţie

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left[x\left(2-\frac{3}{x}\right)\right]^{51} \cdot \left[x\left(-1+\frac{1}{x}\right)\right]^9}{\left[x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)\right]^{25} \cdot \left[x\left(5+\frac{3}{x}\right)\right]^{10}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{51} \cdot \left(2-\frac{3}{x}\right)^{51} \cdot x^9 \cdot \left(-1+\frac{1}{x}\right)^9}{x^{50} \cdot \left(3+\frac{2}{x^2}\right)^{25} \cdot x^{10} \cdot \left(5+\frac{3}{x}\right)^{10}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{51} \cdot \left(-1+\frac{1}{x}\right)^9}{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)^{25} \cdot \left(5+\frac{3}{x}\right)^{10}} = \frac{-2^{51}}{3^{25} \cdot 5^{10}}$$

410. Să se calculeze limita funcţiei $f(x) = \dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}$ cu $m, n \in \mathbb{N}$, pentru $x \to 1$.

Soluţie Se aduce la acelaşi numitor, se face simplificarea cu $1-x$ şi trecînd la limită, avem:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{m(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) - n(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\ldots+x^{m-1})(1+x+\ldots+x^{n-1})} =$$

$$= \frac{1}{mn} \lim_{x \to 1} \frac{m(1+x+\ldots+x^{n-1}-n) - n(1+x+\ldots+x^{m-1}-m)}{1-x}$$

şi scoţînd din nou factor la numărător pe $(1-x)$, iar apoi efectuînd calculele se obţine limita $\dfrac{m-n}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

411. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x^7 - 3x^3 + x - 1)(x+2)^9 - x^3 + 3}{x^4 + 2x + 5}$

b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(-2x^3 - 4)^{2n-p+1} - (3x^2 + 1)^{n-p-1}}{5x^{6n-3p+4} - 2^{6n}}, \; n, p \in \mathbb{N}, \; p < n, \; n \geq 2$$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x^3 - 1)^{10} \cdot (-x^4 + 2)^{21}}{-3x^{113} + 5x^2 + 6}$

Soluție

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x^7 - 3x^3 + x - 1)(x+2)^9 - x^3 + 3}{x^4 + 2x + 5} = \dfrac{-1 \cdot 2^9 + 3}{5} = -\dfrac{509}{3}$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{6n-3p+3} \cdot \left(-2 - \frac{4}{x^3}\right)^{2n-p+1} - x^{2n-2p-2} \cdot \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)^{n-p-1}}{x^{6n-3p+4} \cdot \left(5 - \frac{2^{6n}}{x^{6n-3p+4}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(-2 - \frac{4}{x^3}\right)^{2n-p+1} - \frac{1}{x^{4n+5p+5}} \cdot \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)^{n-p+1}}{x \cdot \left(5 - \frac{2^{6n}}{x^{6n-3p+4}}\right)} = 0$$

c)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x^3 - 1)^{10} \cdot (-x^4 + 2)^{21}}{-3x^{113} + 5x^2 + 6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{114}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{10} \cdot \left(-1 + \frac{2}{x^4}\right)^{21}}{x^{113}\left(-3 + \frac{5}{x^{111}} + \frac{6}{x^{113}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{10} \cdot \left(-1 + \frac{2}{x^4}\right)^{21}}{-3 + \frac{5}{x^{111}} + \frac{6}{x^{113}}} = \frac{-\infty \cdot (-1)}{-3} = -\infty$$

412. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{n^2 x^n (x-1)^2 - 2nx^n(x-1) + (x^n - 1)(x+1)}{(x-1)^3}$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Ţinînd seama de identitatea:

$$(x-1)^3(1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}) =$$

$$= n^2x^n(x-1)^2-2nx^n(x-1)+(x^n-1)(x+1)$$

rezultă că limita cerută este egală cu $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

413. Să se calculeze $L=\lim\limits_{x\to 1}\frac{nx^{n+2}-x^{n+1}-(n+1)x^n+(x+1)}{x^3-x^2-x+1}$ ştiind că $n\in\mathbb{N}^*$.

R. $L=\frac{n(n+1)}{2}$.

414. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

R. $\frac{n(n+1)}{2}$

415. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-1+p}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^p-1)}$, unde $n, p\in\mathbb{N}$.

R. Se face mai întîi simplificarea cu $(x-1)^p$, limita este C_n^p.

416. Să se calculeze limitele următoarelor funcţii:

a) $f(x)=\frac{x^m-1}{x^n-1}$, $x\to 1$; $m,n\in\mathbb{N}^*$;

b) $f(x)=\frac{x^m+1}{x^n+1}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$, $x\to+\infty$;

c) $f(x)=\frac{2x^2-4}{3x^2-6}$, $x\to\sqrt{2}$;

d) $f(x)=\frac{2x^2+x}{3x^2-x}$, $x\to 1$;

e) $f(x)=\frac{x^{101}-3x+2}{-x^{102}+2x-3}$, $x\to-\infty$;

f) $f(x)=\frac{(2x^4-x^2)^5\cdot(x^2-2)^3}{(2x^2+3)^{13}}$, $x\to+\infty$

Scanned with OKEN Scanner

R. a) $\frac{m}{n}$; b) 1 dacă $m = n$, 0 dacă $m < n$ şi $+\infty$ dacă $m > n$;

c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{3}{2}$; e) 0; f) $\frac{1}{2^8}$.

417. Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$.

Soluţie Sîntem în cazul exceptat $\infty - \infty$. Înmulţim cu conjugata expresiei atît numărătorul cît şi numitorul. Avem:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 5x}}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 5x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} =$$

$$= -5 \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\left(1 + \sqrt{i + \frac{5}{x}}\right)} = -5 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} =$$

$$= \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{\lim\limits_{x \to +\infty} x}}} = \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{\infty}}} = -\frac{5}{2}.$$

418. Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

Soluţie Sîntem în cazul $\frac{0}{0}$. Amplificăm expresia cu conjugata numărătorului şi avem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1})}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)\cdot 1} + \sqrt[3]{1^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)\cdot 1} + \sqrt[3]{1^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)\cdot 1} + \sqrt[3]{1^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} = \frac{1}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

419. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} - 5}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x^2+5x+23} - 9}, \text{ pentru } x \to 2 \text{ şi}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{3x^3-10x+13} + \sqrt[3]{5x^2-16x+11} - 6}{\sqrt[4]{27x-65} + \sqrt[3]{8x^2-25x+4} - 3}, \text{ pentru } x \to 3.$$

Soluţie Ambele limite reprezintă nedeterminări de forma $\frac{0}{0}$.

Pentru $f(x)$ observăm că putem scrie:

$$f(x) = \frac{\frac{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{(\sqrt{x^2+5})^2 - 3^2}{\sqrt{x^2+5}+3}}{\frac{(\sqrt{3x-2})^2 - 2^2}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{(\sqrt{4x^2+5x+23})^2 - 7^2}{\sqrt{4x^2+5x+23}+7}}$$

Se efectuează calculele, se simplifică cu $x-2$ şi se obţine $\frac{11}{27}$.

Pentru $g(x)$ se procedează similar, observînd că numitorul se poate scrie sub forma: $\left(\sqrt[4]{27x-65} - \sqrt[4]{2^4}\right) + \left(\sqrt[3]{8x^2-25x+4} - \sqrt[3]{1}\right)$; limita este $\frac{314}{817}$.

420. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$

Soluţie

a) Avem:

$$\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{2x}{|x| \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}$$

cum $x \to +\infty$, $|x| = x$ și avem limita egală $\frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1$.

b) Deoarece pentru $x \to -\infty$, $|x| = -x$ limita este egală cu -1.

c) Amplificăm expresia cu conjugata și avem:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right) = \frac{2}{3}$$

d) Sîntem în cazul de excepție $\frac{0}{0}$. Notînd $a = \sqrt[n]{1 + x}$ și $b = 1$ și ținînd cont de relația $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ avem:

$$\frac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x} = \frac{x}{x\left[\sqrt[n]{(1 + x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1 + x)^{n-2}} + \ldots + 1\right]}$$

deci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1 + \sqrt[n]{1 + x} + \ldots \sqrt[n]{(1 + x)^{n-1}}} = \frac{1}{n}$.

421. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[p]{x} - 1}{\sqrt[r]{x^q - 1}}$, $p, r, q \in \mathbf{N}$, $p, r \geq 2$.

Soluție Observăm mai întîi că dacă r este număr par, limita din enunț are sens numai dacă $x \to 1$, $x > 1$. Calculul limitei îl efectuăm astfel:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[p]{x} - 1}{\sqrt[r]{x^q - 1}} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt[r]{x^q - 1} \cdot \left[\sqrt[p]{x^{q-1}} + \ldots + \sqrt[p]{x} + 1\right]} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \sqrt[r]{\frac{(x - 1)^r}{x^q - 1}} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt[p]{x^{q-1}} + \ldots + \sqrt[p]{x} + 1} =$$

$$= \sqrt[r]{\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^{r-1}}{x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + 1}} \cdot \frac{1}{p} = \sqrt[r]{\frac{0}{q}} \cdot \frac{1}{p} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

422. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{mx^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$, m parametru real.

Soluţie Deosebim cazurile:

a) $m<0$. În acest caz $mx^2+2x+1\geq 0$ numai pentru x aparţinînd unui interval finit, deci limita nu are sens pentru că $+\infty$ nu este punct de acumulare al funcţiei de sub semnul limitei.

b) $m\in[0,1)$. Amplificînd cu expresia conjugată obţinem:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{mx^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m-1)x+2}{\sqrt{m+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\infty$$

c) $m=1$. În acest caz, procedînd ca la b) obţinem limita 1.

d) $m>1$, cînd se obţine limita $+\infty$.

423. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Soluţie

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}}=-1$$

Scanned with OKEN Scanner

424. Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$;

c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x - b} - \sqrt{a - b}}{x - a}$, $0 < b < a$, constante;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - 2x\right)$

R. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{2\sqrt{a - b}}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) 1; f) $+\infty$.

425. Să se determine constantele $a > 0$ și $b > 0$, astfel încît limita funcției $f(x) = \sqrt[5]{ax^5 + (b+1)x^4 + 1} - \sqrt[5]{bx^5 + x^4 - 1}$ pentru $x \to +\infty$, să fie egală cu 2.

R. Limita reprezintă o nedeterminare de forma $\infty - \infty$; se înmulțește și se împarte cu conjugata lui $f(x)$; se obține $a = b = 10^5$.

426. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 + x^2\sqrt{1 + x^4\sqrt{1 + x^8\sqrt{1 + x^{16}}}}} - \sqrt{1 + x\sqrt{1 + x^3\sqrt{1 + x^6\sqrt{1 + x^{12}}}}} \right)$$

R. $+\infty$

427. Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - x\right)$.

R. $-\infty$

Scanned with OKEN Scanner

428. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[p]{x + \sqrt[p]{x + \sqrt[p]{x}}}}{\sqrt[p]{x - \sqrt[p]{x + \sqrt[p]{x}}}}$, $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x^2 + 5} - 5}{\sqrt{3x - 2} + \sqrt{4x^2 + 5x + 23} - 9}$

R. a) 1; b) $\dfrac{77}{189}$

429. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel ca $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{mx^3 + (n + 2)x^2 + 14} - \sqrt[3]{nx^3 + 2x^2 - 3}\right)$ să fie egală cu 1.

R. $m = n = \dfrac{1}{3}$.

430. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x - 6} - \sqrt{x^2 - 2x + 16}}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x + 2}}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 12} - \sqrt[3]{2x^2 + x + 6}}{x - 3}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1 + x} - \sqrt[n]{1 - x}}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\left(\sqrt{x + 1} - \sqrt{\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}}\right)\left(x - \sqrt[3]{9 + 6x}\right)}{(x - 3)^2}$

R. a) $\dfrac{5}{8}$; b) -6; c) $-\dfrac{5}{27}$; d) $\dfrac{2}{n}$; e) $\dfrac{7}{72}$.

Scanned with OKEN Scanner

431. Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x - \sqrt[3]{x^2}}\right)$.

R. $\frac{2}{3}$.

432. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{ax^2 + 6x + 10} - (ax + 3)\right]$, unde $a \in \mathbb{R}$.

R. Pentru ca limita să aibă sens, este necesar ca $a \in [0, +\infty)$.
Se disting cazurile:

a) $a = 0 \rightarrow$ limita $l = +\infty$. Dacă

$$a \in (0, +\infty): \sqrt{ax^2 + 6x + 10} - (ax + 3) = \frac{a(1-a)x^2 + 6(1-a)x + 1}{\sqrt{ax^2 + 6x + 10} + (ax + 3)}$$

b) $a \in (0, 1) \rightarrow l = -\infty$

c) $a = 1 \rightarrow l = \frac{1}{2}$

d) $a \in (1, +\infty) \rightarrow l = +\infty$

433. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{nx} \cdot \log_a \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{1 + kx}\right)$.

Soluţie Avem

$$\frac{1}{nx} \cdot \log_a \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{1 + kx} = \frac{1}{x}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}\log_a(1 + kx)}{x}\right]$$

Ţinînd cont că dacă $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln[1 + f(x)]}{f(x)} = 1$

Obţinem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{k}\log_a(1 + kx)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

Rezultă: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{nx} \cdot \log_a \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{1 + kx} = \frac{1}{\ln a}$.

Scanned with OKEN Scanner

434. Se dau funcţiile: $f(x) = \dfrac{\log_a \log_c[(x^2 - 3)\,c]}{x - 2}$ şi

$g(x) = \dfrac{\log_c \log_a[(x^2 - 3)\,a]}{x - 2}$. Să se calculeze limitele cînd $x \to 2$.

Soluţie Avem:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{\log_a \log_c[(x^2 - 3)\,c]}{x - 2} =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \lim_{x \to 2} \left[\frac{\ln[1 + \log_c(x^2 - 3)]}{\log_c(x^2 - 3)} \cdot \frac{\log_c(x^2 - 3)}{x - 2} \right] =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{x \to 2} \frac{\log_c(x^2 - 3)}{x - 2} = \frac{1}{\ln a \cdot \ln c} \cdot \lim_{x \to 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x - 2}$$

Făcînd substituţia $x - 2 = t$ obţinem:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x - 2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\ln(1 + 4t + t^2)}{4t + t^2} \cdot \frac{4t + t^2}{t} \right] = 4;$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\log_a \log_c[(x^2 - 3)\,c]}{x - 2} = \frac{4}{\ln a \cdot \ln c}$$

Analog găsim $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\log_c \log_a[(x^2 - 3)\,c]}{x - 2} = \dfrac{4}{\ln c \cdot \ln a}$.

435. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\sec^2 \sqrt{x})}{2x}$.

Soluţie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sec^2 \sqrt{x})}{2x} = \lim_{x \to 0} \ln(\sec^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \to 0} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \ln \left\{ \lim_{x \to 0} \left[(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}} \right]^{\frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x}} \right\} = \ln \left(e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x}} \right) =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

436. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$

Soluţie Sîntem în cazul de excepţie $\frac{\infty}{\infty}$. Vom transforma funcţia a cărei limită vrem să o calculăm astfel:

$$\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})} = \frac{\dfrac{\ln e^x + \ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{x}}{\dfrac{\ln e^{2x} + \ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)}{x}} = \frac{1+\dfrac{x^2\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x^2}}}{e^x\cdot x}}{2+\dfrac{x^4\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)^{\frac{e^{2x}}{x^4}}}{e^{2x}\cdot x}}$$

Însă $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^x}\right)}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}}\ln\left(1+\dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)^{\frac{e^{2x}}{x^4}} = 0$,

deci $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})} = \dfrac{1}{2}$.

437. Calculaţi: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg\cos x}{\sin^2 x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg\sin x - \lg x}{1-\cos x}$

Soluţie

a) Fie $\cos x = 1+\alpha$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \alpha\to 0}}\frac{\lg(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos x - 1}} = -\lim_{\alpha\to 0}\frac{\lg(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{2(1+\alpha)} = -\frac{\lg e}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Înlocuim $\frac{\sin x}{x} = 1 + \alpha$ pentru $x \to \alpha \Rightarrow \alpha \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\lg \frac{\sin x}{x}}{1 - \cos x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ \alpha \to 0}} \frac{\lg (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{\frac{x(1 - \cos x)}{\sin x - x}} = -\frac{\lg e}{3}$$

438. Să se calculeze $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (x^2 + x + 1)}{\ln (x^8 - x + 1)}$.

Soluție

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (x^2 + x + 1)}{\ln (x^8 - x + 1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{8 \ln x + \ln \left(1 - \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^8}\right)} = \frac{1}{4}$$

439. Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{(2^x - 1) \cdot \ln (1 + \sin^2 x)}{(\sqrt{1 + x} - 1) \cdot \operatorname{tg} 2x}$.

Soluție Scriem

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{\ln (1 + \sin^2 x)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x} - 1} \cdot \frac{2x}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{x}{2}$$

Folosind limitele standard avem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \; ; \; a > 0 \, , \, a \neq 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1 \, , \, \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{1}{2} \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

avem $I = \ln 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$.

440. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + kx)}{x}$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\lim\limits_{x \to e} (\ln x)^{\frac{1}{x^2 - 3ex + 2e^2}}$

R. a) 0; b) k; c) $e^{-\frac{1}{e^2}}$.

441. Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\ln(e + x) \cdot \ln(e + 2x) \cdot \ldots \cdot \ln(e + nx)}}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{a^2 - x^2} \cdot \ln \frac{\arcsin x}{\arcsin a}$; $ax > 0$; $a, x \in [-1, 1]$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot \arcsin x}{\ln \sqrt{1 - x^2}}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln (1 + x)}$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln (1 + x)}{\ln x}\right]^x$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^x}{\ln \cos x}$.

R. a) $-\frac{n}{2}$; b) 1; c) -2; d) 1; e) 1; f) -2.

442. Calculați limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \cdot \ln \frac{2a + x}{a + x}\right]$;

b) $\lim\limits_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1 + x^2} - 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\ln (1 + \operatorname{tg} 2x)}$.

R. a) 1; b) $\frac{1}{e}$; c) -2; d) 1.

Scanned with OKEN Scanner

443. Să se arate că $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^3 - 1} = \dfrac{1}{3}$, iar $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(1 + e^{3x})}{\ln(1 + e^{5x})} = +\infty$.

444. Demonstrați că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2 - \cos x)}{\ln(1 + \sin x)} = 0$.

445. Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin(4m + 1)x}{\ln \sin(4n + 1)x}$; $m, n \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \lambda_1 x) - \ln(1 + \lambda_2 x)}{\ln(1 + \lambda_3 x) - \ln(1 + \lambda_4 x)}$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}_+^*$; $\lambda_3 \neq \lambda_4$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln[(1 + \arcsin x) \cdot (1 + \arcsin 2x) \cdot \ldots \cdot (1 + \arcsin nx)]}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$

R. a) $\left(\dfrac{4m + 1}{4n + 1}\right)^2$; b) $\dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_4}$; c) $\dfrac{n(n + 1)}{2}$

446. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\lg(1 + 10x)}{x} = 10 \lg e$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \ln \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\right) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(2x + 1) - \ln(x + 2)] = \ln 2$

447. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{a^{x^2 - 1} - 1}{\sin(x^2 - 3x + 2)}$ unde $a > 0$.

Soluție Ținînd seama că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$ avem:

$$\lim_{x \to 1} \frac{a^{x^2 - 1} - 1}{\sin(x^2 - 3x + 2)} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{a^{x^2 - 1} - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{\sin(x^2 - 3x + 2)} \right).$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\cdot \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}\Big) = \ln a \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2} = -2\ln a$$

(Am ţinut cont şi de limita standard $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$).

448. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{px}-1}{x}$, $p \in \mathbb{N}^*$

Soluţie I Fie $t = e^{px} - 1$.

Avem $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$, $e^{px} = 1 + t \Rightarrow x = \frac{1}{p}\ln(1+t)$. Rezultă:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{px}-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{p}\ln(1+t)} = \frac{p}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln(1+t)} =$$

$$= \frac{p}{\ln \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{p}{\ln e} = p$$

Soluţie II Folosim limita standard $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{px}-1}{x} = \lim_{x\to 0} p\cdot\frac{(e^{px}-1)}{px} = p\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{px}}{px} = p\cdot 1 = p$$

449. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x - x^2}{x-2}$

Soluţie $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-2^2}{x-2} - \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2} = 4\ln 2 - 4$

(S-a folosit limita standard $\lim\limits_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b} = a^b\cdot\ln a$)

450. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$

Soluţie $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)\cdot\frac{1}{x}}$

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{a(a^x-1)+b(b^x-1)+c(c^x-1)}{a+b+c}=$$

$$=\frac{a\cdot\ln a+b\cdot\ln b+c\cdot\ln c}{a+b+c}=\ln(a^a\cdot b^b\cdot c^c)^{\frac{1}{a+b+c}};$$

$a, b, c > 0$,, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

451. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$

Soluție $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}-\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}$

Calculăm separat cele două limite. Avem $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}=a^a\cdot\ln a$, conform limitei standard.

$$\frac{x^a-a^a}{x-a}=\frac{e^{\ln x^a}-e^{\ln a^a}}{x-a}=\frac{e^{\ln a^a}\left(e^{a\cdot\ln\frac{x}{a}}-1\right)}{x-a}=$$

$$=a^a\cdot\frac{e^{a\cdot\ln\frac{x}{a}}-1}{a\cdot\ln\frac{x}{a}}\cdot\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}$$

Dar $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{a\cdot\ln\frac{x}{a}}-1}{a\cdot\ln\frac{x}{a}}=1$; $\lim\limits_{x\to a}\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}=1$, de unde

$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=a^a$. Deci $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\cdot(\ln a-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

452. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$

Soluție

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx} = \lim_{x \to 0} e^{bx} \cdot \frac{e^{(a-b)x} - 1}{2 \sin \frac{a-b}{2} x - \cos \frac{a+b}{2} x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} e^{bx} \cdot \frac{e^{(a-b)x} - 1}{(a-b)x} \cdot \frac{\frac{a-b}{2} x}{\sin \frac{a-b}{2} x} \cdot \frac{1}{\cos \frac{a+b}{2} x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

453. $f(x) = x^3 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$, cînd $x \to +\infty$.

Soluție Limita reprezintă o nedeterminare de forma $\infty \cdot 0$, dar putem scrie: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{e^{\frac{-1}{x(x+1)}} - 1}{-\frac{1}{x(x+1)}} \cdot \dfrac{x^3}{x(x+1)}$, observîndu-se acum că limita este $+\infty$, primii doi factori avînd limita 1.

454. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1}{\sin^3 x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot e^{\frac{1}{\sin x}}$

Soluție

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{e^{x^3} - 1}{x^3} \cdot \left(\dfrac{x}{\sin x} \right)^3 \right] = 1 \cdot 1^3 = 1$

b) Pentru limita a doua se disting două cazuri: cînd $x \to 0^+$ și $x \to 0^-$. În primul caz limita reprezintă o nedeterminare de forma $0 \cdot \infty$, aceasta putîndu-se înlătura observînd că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x e^{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{x}{\sin x} \cdot \dfrac{e^{\frac{1}{\sin x}}}{\frac{1}{\sin x}} \right)$, de unde rezultă limita $+\infty$; în al doilea caz pentru $x \to 0^-$ limita este 0, ținînd seama că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{\sin x} = -\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

455. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + 4x + x^2}{1 + x} \right)^{\frac{1}{x}}$

Soluție

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + 4x + x^2}{1 + x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{3x + x^2}{1 + x} \right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(1 + \frac{3x + x^2}{1 + x} \right)^{\frac{1 + x}{3x + x^2}} \right]^{\frac{3x + x^2}{1 + x} \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x + x^2}{x + x^2}} = e^3$$

456. a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^{\sqrt{2}} - 3x}{x^{\pi} - 3}$;

b) $\lim\limits_{x \to 3,2} \dfrac{3,2 \cdot x^{3,2} - 5 \cdot x^{4,2}}{3 \cdot x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{100}} \dfrac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{3}}}{2 - x}$

Soluție

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^{\sqrt{2}} - 3x}{x^{\pi} - 3} = \dfrac{2^{\sqrt{2}} - 6}{2^{\pi} - 3}$

b)

$$\lim_{x \to 3,2} \frac{3,2 \cdot x^{3,2} - 5 \cdot x^{4,2}}{3 \cdot x^2} = \frac{3,2 \cdot (3,2)^{3,2} - 5 \cdot (3,2)^{4,2}}{3 \cdot (3,2)^2} =$$

$$= \frac{-4 \cdot (3,2)^{4,2}}{3 \cdot (3,2)^2} = \frac{-4 \cdot (3,2)^2}{3} = -\frac{40,96}{3}$$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{100}} \dfrac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{3}}}{2 - x} = \dfrac{(1 + 100)^{\sqrt{3}}}{2 - \frac{1}{100}} = \dfrac{100 \cdot 101^{\sqrt{3}}}{199}$

Scanned with OKEN Scanner

457. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Soluție

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} [1 - (1 - \cos x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})^{-\frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0}\left(-\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x}\right)} =$$

$$= e^{-2 \cdot \lim\limits_{x \to 0}\left[\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{4x}\right]} = e^{-2 \cdot 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{4}} = e^0 = 1$$

458. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[9]{x} - 1}{x - 1}$

Soluție Notăm $x - 1 = t$. Pentru $x \to 1$, $t \to 0$ avem:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[9]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 + t)^{\frac{1}{9}} - 1}{t} = \frac{1}{9}$$

459. $\lim\limits_{x \searrow 0} x^{\left[\frac{1}{x}\right]}$

Soluție Ținem seama că $0 < x^{\left[\frac{1}{x}\right]} \leq x^{\frac{1}{x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ și avem

$$\lim_{x \searrow 0} x^{\left[\frac{1}{x}\right]} = 0$$

460. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{\sin \alpha x} - a^{\sin \beta x}}{a^{\sin \gamma x} - a^{\sin \delta x}}$; $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$; $\gamma \neq \delta$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}$

R. a) $\dfrac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta}$; b) $\dfrac{1}{8}$

Scanned with OKEN Scanner

461. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-2x}}{1 + x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 1}{\operatorname{tg} x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{\sin x}$

R. a) 1; b) 4; c) 2

462. a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$; $a, b > 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$; $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$

R. a) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x + b^x - 2}{x}} = \sqrt{a \cdot b}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x - n}{x}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$

463. a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^{2x} + 2^x - 3e^{5x}}{e^{x+2}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(e^x - 1)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x + 3^x + 4^x}{2e^{x+2}}$

e) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{e^{2x}}{3^x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{-x}}$

R. a) $\dfrac{e^6 + 2^3 - 3e^{15}}{e^5}$; b) ∞; c) -1; d) $\dfrac{3}{2e^2}$; e) $\dfrac{e^{2\sqrt{2}}}{3\sqrt{2}}$; f) ∞.

464. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{5x + e^{\frac{1}{x}}}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{5}{x} + e^{\frac{1}{x}}}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\frac{5}{x} + e^{\frac{1}{x}}}$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{x}}$; e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x}}{x - 1}$; f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-2x}{x^2 - 4}$.

R. a) 0; b) 1; c) 1; d) ∞; e) ∞; f) $-\infty$.

465. a) $\lim\limits_{x \to 0} x^{x}$, $x > 0$; b) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

R. a) 1; b) $\dfrac{1}{e}$.

466. a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2 + x}{3 - x}\right)^{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right)^{x+1}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}\right)^{x^2}$.

R. a) 1; b) $\dfrac{1}{4}$; c) 0; d) $\dfrac{3}{2}$; e) 0.

467. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^{x}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^{x}$.

R. a) $\dfrac{1}{e^2}$; b) e^2; c) $\dfrac{1}{e}$.

468. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{3x - \pi}$

Soluție

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{3x - \pi} = \lim_{y \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right) - 1}{3\left(\frac{\pi}{3} + y\right) - \pi} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\right) - 1}{3y} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos y - 1}{3y} -$$

$$- \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{3}\sin y}{3y} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

unde am notat $x = \frac{\pi}{3} + y$.

469. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin^2 x}$

Soluție Sîntem în cazul $\frac{0}{0}$. Avem:

$$\frac{1-\cos^3 x}{x \cdot \sin^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x \cdot \sin^2 x} = \frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos\frac{x}{2} \cdot \cos x} \cdot \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}}$$

Însă

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos\frac{x}{2} \cdot \cos x} = 3 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{4\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}$$

Deci $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x} = \dfrac{3}{4}$.

470. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}\right)^{\operatorname{cosec} x}$

Soluție

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)^{\operatorname{cosec} x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(1 + \frac{1+\sin 2x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}}\right]^{\frac{1+\sin 2x-\cos 2x}{\cos 2x \cdot \sin x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cdot\cos x-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\cos 2x \cdot \sin x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{2(\sin x+\cos x)}{\cos 2x}} =$$

$$= e^{2 \cdot \frac{1}{1}} = e^2$$

471. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S}{n}$, unde $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos\dfrac{k\pi}{2n}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție Ținem cont de relația:

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx=\frac{1}{2}\cdot\left[\sin x\left(k+\frac{1}{2}\right)-\sin x\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]$$

Fie

$$\sin\frac{x}{2}\cdot S_n'=\sin\frac{x}{2}\cdot[1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos(n-1)x]=$$

$$=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x+\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x+\ldots+\sin\frac{x}{2}\cdot\cos(n-1)x$$

Înlocuind se obține: $S_n'=\dfrac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$;

$$S_n=\frac{\sin\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4n}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{4n}}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to+\infty}2n\cdot\sin\frac{\pi}{4n}=\frac{\pi}{2}$, rezultă că limita căutată este $\frac{2}{\pi}$.

472. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{x}{k(k+1)}}{\cos\frac{x}{k}\cdot\cos\frac{x}{k+1}}$

Soluție

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{k(k+1)}}{\cos\frac{x}{k}\cdot\cos\frac{x}{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{x}{k}-\frac{x}{k+1}\right)}{\cos\frac{x}{k}\cdot\cos\frac{x}{k+1}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{k}\cdot\cos\frac{x}{k+1}-\sin\frac{x}{k+1}\cdot\cos\frac{x}{k}}{\cos\frac{x}{k}\cdot\cos\frac{x}{k+1}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{k}-\operatorname{tg}\frac{x}{k+1}\right)=\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\frac{x}{k+1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Limita este egală cu $\operatorname{tg} x$.

473. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x)$

Soluție $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = \dfrac{\sin x \cdot \sin 2x}{\cos x \cdot \cos 2x} = \dfrac{2 \sin^2 x}{\cos 2x}$

$$2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = \frac{2 \cos x \cdot \cos 2x}{2 \sin^2 x \cdot \cos x} = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}$$

Deci $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x) = -2 - 1 = -3$

474. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + 2 \cdot \operatorname{tg} 2x + 2^2 \cdot \operatorname{tg} 2^2 x + \ldots + 2^n \cdot \operatorname{tg} 2^n x)$

Soluție Considerînd identitatea $\operatorname{ctg} a - 2 \cdot \operatorname{ctg} 2a = \operatorname{tg} a$, suma devine:

$$(\operatorname{ctg} x - 2 \cdot \operatorname{ctg} 2x) + (2 \cdot \operatorname{ctg} 2x - 4 \cdot \operatorname{ctg} 4x) + \ldots$$
$$\ldots + (2^n \cdot \operatorname{ctg} 2^n x - 2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} 2^{n+1} x) =$$
$$= \operatorname{ctg} x - 2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} 2^{n+1} x$$

Avem

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + 2 \cdot \operatorname{tg} 2x + 2^2 \cdot \operatorname{tg} 2^2 x + \ldots + 2^n \cdot \operatorname{tg} 2^n x) =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{ctg} x - 2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} 2^{n+1} x) = 1 - 2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} 2^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} =$$

$$= 1 - 2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} \pi \cdot 2^{n-1}$$

475. Fie

$$S_n = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^k}$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ și $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} S_n$.

Soluție Fie identitatea $2 \cdot \operatorname{ctg} 2a - \operatorname{ctg} a = -\operatorname{tg} a$ cu $a \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Luăm succesiv $a = x$, $a = \dfrac{x}{2}$, $\ldots$, $a = \dfrac{x}{2^n}$ și obținem:

Scanned with OKEN Scanner

$$2 \cdot \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} x$$

$$2 \cdot \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} \frac{2}{x} = -\operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

.....

$$2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n-1}} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} = -\operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

Dacă înmulțim corespunzător egalitățile cu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ și apoi adunînd pe coloane avem: $S_n = -(2 \cdot \operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2^{n+2}})$, de unde

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = -2 \cdot \operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{x} \; ;$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} S_n = -2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2^{n+2}} = -\frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

476. Să se calculeze $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 3x}$

Soluție $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} [1 + (\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x - 1)]^{\operatorname{tg} 3x}$

Utilizăm limita standard $\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to +\infty}} (1 + u)^v = e^{\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ v \to +\infty}} (u \cdot v)}$ notînd $u = -1 + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 3x$ și $v = \operatorname{tg} 3x$.

Să calculăm:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (-1 + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg} 3x = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{-\operatorname{tg} x \cdot (3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

Rezultă: $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^{-\frac{4}{3\sqrt{3}}}$

Scanned with OKEN Scanner

477. Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x \cdot e^x) - \cos(x \cdot e^{-x})}{x^3}$

Soluție

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \sin \dfrac{x(e^{-x} - e^x)}{2} \cdot \sin \dfrac{x(e^x + e^{-x})}{2}}{x^3} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sin \dfrac{x(e^{-x} - e^x)}{2}}{x \cdot \dfrac{e^{-x} - e^x}{2}} \cdot \frac{\sin \dfrac{x(e^x + e^{-x})}{2}}{\dfrac{x(e^x + e^{-x})}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{4x} - 1}{x \cdot e^{2x}} = -2$$

deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 1}{x} = 4$

478. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \sin x}{4 \sin 5x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 2x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sin x - \cos x \cdot \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}\right)$

Soluție

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \sin x}{4 \sin 5x} = \dfrac{3}{4} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\sin 5x}{5x}} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{20}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{7x}}{\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2x}} \cdot \dfrac{\dfrac{7}{1}}{\dfrac{2}{1}} = \dfrac{7}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sin x - \cos x \cdot \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}\right) = 0 - 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}{\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{5x} \cdot 5} = -\dfrac{3}{5}$

479. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^2}{x^4}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2 \cdot \operatorname{tg} x}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x \cdot \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + x \cdot \sin x}}{x^4}$; d) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos nx}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x}{x^2}$

R. a) $\dfrac{1}{4}$; b) $-\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{4}$; d) Se face substituția $x = \pi + t$ și se găsește limita $\dfrac{\pi}{2}$; e) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$; f) $\dfrac{5}{2}$ (se adună și se scade la numărător $\cos x$).

480. a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - 1)\left(1 - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\right)^{\frac{\sin 8x}{x - \sin 3x}}$

R. a) $\dfrac{1}{e}$; b) 1; c) 1

481. a) $\lim\limits_{x \to a} (x - a) \cdot \operatorname{ctg} \dfrac{\pi x}{a}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n \cdot \left(\sin \dfrac{nx + 1}{n} - \sin x\right)$

R. a) Notăm $x - a = t$ și obținem limita $\dfrac{a}{\pi}$; b) $\cos x$

482. a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \operatorname{tg} \dfrac{x}{2^n}\right)^{2^n}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x \cdot \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 8x + 3}\right)^{3 \cdot \operatorname{ctg} 6x}$; d) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$

R. a) e^x; b) 1; c) $\dfrac{1}{e}$; d) $e^{-\frac{2}{\pi}}$

Scanned with OKEN Scanner

483. a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2 \cdot \sin 2x - \cos 4x}{1 + \sin^2 \frac{x}{2}}$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}} \right)$;

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2 \cdot \sin^2 x + \operatorname{cosec} x}{3 \cdot \sec^2 2x + 1}$; d) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{6}} [\operatorname{ctg}(-x) + 3 \sin(-2x)]$

R. a) $-\dfrac{2}{3}$; b) 0; c) 0; d) $2\sqrt{3}$

484. Să se cerceteze dacă funcția $f(x)$ are limită în punctul 0, unde

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}, & x > 0 \end{cases}$$

R. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = e^{-\frac{3}{2}}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = e^{\frac{1}{2}}$, deci funcția f nu are limită în $x_0 = 0$

485. Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{\sin 5x \cdot \sin 8x}$ și $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{\cos x + 1}$.

R. $\dfrac{1}{16}$ și 2

486. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\arcsin(x + 2)}{x^2 + 2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)}{\operatorname{tg}(a + x) - \operatorname{tg}(a - x)}$

Soluție

a) Notăm $x + 2 = y$. Cînd $x \to -2$, $y \to 0$ limita devine

$$\lim_{x \to -2} \frac{\arcsin(x + 2)}{x^2 + 2x} = \lim_{y \to 0} \frac{\arcsin y}{(y - 2)y} = -\frac{1}{2} \text{ deoarece } \lim_{y \to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1.$$

b) Avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)}{\operatorname{tg}(a + x) - \operatorname{tg}(a - x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(a + x) \cdot \cos(a - x) \cdot [\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)]}{\sin 2x} =$$

$$= \cos^2 a \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)}{2x} =$$

$$= \cos^2 a \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)}{2x} =$$

$$= \cos^2 a \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)}{\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(a + x)] - \operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(a - x)]} =$$

$$= \cos^2 a \cdot \lim_{x \to 0} [\cos \operatorname{arctg}(a + x)] \cdot [\cos \operatorname{arctg}(a - x)] \cdot$$

$$\cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)}{\sin[\operatorname{arctg}(a + x) - \operatorname{arctg}(a - x)]} = \frac{\cos^2 a}{1 + a^2}$$

S-a ţinut seama că: $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

487. $\lim_{x \to a} \frac{\arcsin(x - a)}{x^n - a^n}$ unde $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie Sîntem în cazul $\frac{0}{0}$. Procedăm astfel:

$$\lim_{x \to a} \frac{\arcsin(x - a)}{x^n - a^n} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\arcsin(x - a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{n \cdot a^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot a^{n-1}}$$

Scanned with OKEN Scanner

488. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\arcsin \dfrac{1 + 2 \cdot \cos 2x}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}}{\sin 3x}$

Soluție Avem

$$\frac{1 + 2 \cdot \cos 2x}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} = \frac{1 + 4 \cdot \cos^2 x - 2}{2(\sqrt{3} \cos x + \sin x)} = \frac{(\sqrt{3})^2 \cos^2 x - \sin^2 x}{2(\sqrt{3} \cos x + \sin x)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Rezultă limita egală cu:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right]}{\sin 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{3}(\pi - 3x)}{\sin(\pi - 3x)} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\pi - 3x}{\sin(\pi - 3x)} = \frac{1}{3}$$

489. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\{a\pi \cdot [\cos(b \cdot \arcsin x) - 1]\}}{x^2}$

Soluție Notăm $f(x) = a\pi \cdot [\cos(b \cdot \arcsin x) - 1]$. Avem $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Deci:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = a\pi \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\cos(b \cdot \arcsin x) - 1}{x^2}$$

Facem substituția $x = \sin t$; cînd $x \to 0$, $t \to 0$ și $\sin t \to 0$. Obținem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin f(x)}{x^2} = a\pi \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\cos(b \cdot \arcsin x) - 1}{x^2} = a\pi \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\cos(bt) - 1}{\sin^2 t}$$

$$= a\pi \cdot \lim_{t \to 0} \left[\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2 \cdot \sin^2 \frac{bt}{2}}{t^2}\right)\right] = -a\pi \cdot \lim_{t \to 0} \left(\frac{b^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{bt}{2}}{\frac{b^2 t^2}{4}}\right) =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= -\frac{ab^2\pi}{2} \cdot 1 = -\frac{ab^2\pi}{2}$$

Deci $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\{a\pi[\cos(b \cdot \arcsin x) - 1]\}}{x^2} = -\dfrac{ab^2\pi}{2}$

490. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin \operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} \sin x}$; $\lim\limits_{x \to n\pi} \dfrac{\arcsin \operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} \sin x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin \operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} \sin x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\arcsin \operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} \sin x} \cdot \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\arcsin \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\sin x}{\operatorname{arctg} \sin x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \to n\pi} \frac{\arcsin \operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} \sin x} = \lim_{x \to n\pi} \frac{1}{\cos x} = (-1)^n$$

491. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x+1}\right)$; d) $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

R.

a) $\dfrac{2}{3}$;

b) Aplicăm formula:

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

și obținem limita $2 \cdot \ln e = 2$;

c) Se scrie $\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x+1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x+1}$, se aplică formula de la rezultatul b) și găsim limita $\dfrac{1}{2}$;

d) Se face substituția $1 - x = y$ și obținem limita $\dfrac{2}{\pi}$.

Scanned with OKEN Scanner

492. a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{arctg} \dfrac{x-4}{(x-2)^2}$

R. a) $-\dfrac{1}{2}$; b) $-\dfrac{\pi}{2}$

493. a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \left(\operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x+2} - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x+2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$

R. a) $\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) 0.

494. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 \arcsin x}{3 \operatorname{arctg} \sqrt{x}}$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \dfrac{(\arcsin x)^2}{\arccos x - 1}$.

R. a) $\dfrac{4}{3}$; b) $\dfrac{\pi^2}{4\pi - 16}$

495. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}}$.

Soluție

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right) = 2$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze limitele următoare:

496. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}$; b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x}{\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{th}^2 x}$

Soluție a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x} = \dfrac{0 - 1}{1 - 0} = -1$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x}{\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{th}^2 x} = \dfrac{-\infty - 0}{+\infty - 0} = -\dfrac{\infty}{\infty}$

Pentru a ridica nedeterminarea înlocuim $\operatorname{cth} x$ cu $\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$ și avem:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{th} x} - \operatorname{th} x}{\dfrac{1}{\operatorname{th}^2 x} - \operatorname{th}^2 x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{(1 - \operatorname{th}^2 x) \cdot \operatorname{th} x}{(1 - \operatorname{th}^4 x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} = 0$$

497. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{\operatorname{sh} x} - e^{\operatorname{ch} x}}{x \cdot \operatorname{ch} x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} x} + e^{\operatorname{ch} x}}{\operatorname{sh} x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 2} \ln \dfrac{e^{\operatorname{sh} x} \cdot e^{\operatorname{th} x}}{e^{\operatorname{cth} x}}$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{2 \operatorname{sh}^2 x} + e^{\operatorname{sh} x} + 1\right)$

Soluție

a) Calculăm separat $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{sh} x$ și $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{ch} x$. Avem:

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{sh} x = \lim_{x \to 1} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e - \dfrac{1}{e}}{2} = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{ch} x = \lim_{x \to 1} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e + \dfrac{1}{e}}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e},$$

de unde: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{\frac{e^2 - 1}{2e}} - e^{\frac{e^2 + 1}{2e}}}{\dfrac{e^2 + 1}{2e}} = \dfrac{2e}{e^2 + 1} \cdot \left(e^{\frac{e^2 - 1}{2e}} - e^{\frac{e^2 + 1}{2e}}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} x} + e^{\operatorname{ch} x}}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^0 + e^1}{0} = \dfrac{e + 1}{0} = +\infty$

Scanned with OKEN Scanner

c)

$$\lim_{x\to 2} \ln \frac{e^{\operatorname{sh}x}\cdot e^{\operatorname{th}x}}{e^{\operatorname{cth}x}} = \lim_{x\to 2} (\ln e^{\operatorname{sh}x} + \ln e^{\operatorname{th}x} - \ln e^{\operatorname{cth}x}) = \lim_{x\to 2} (\operatorname{sh}x + \operatorname{th}x - \operatorname{cth}x) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} + \frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}} - \frac{e^2 + e^{-2}}{e^2 - e^{-2}} =$$

$$= \frac{e^4 - 1}{2e^2} + \frac{e^4 - 1}{e^4 + 1} - \frac{e^4 + 1}{e^4 - 1} = \frac{e^4 - 1}{2e^2} + \frac{e^8 - 1 - e^8 - 2e^4 - 1}{e^8 - 1} =$$

$$= \frac{e^4 - 1 - 2 - 2e^4}{e^8 - 1} + \frac{1}{2e^2} = \frac{e^8 - 2e^6 - 6e^2 - 1}{2e^{10} - 2e^2}$$

Folosind proprietățile puterilor putem calcula limita și astfel:

$$\lim_{x\to 2} \ln \frac{e^{\operatorname{sh}x}\cdot e^{\operatorname{th}x}}{e^{\operatorname{cth}x}} = \lim_{x\to 2} \ln e^{\operatorname{sh}x + \operatorname{th}x - \operatorname{cth}x} = \lim_{x\to 2} (\operatorname{sh}x + \operatorname{th}x - \operatorname{cth}x) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} + \frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}} + \frac{e^2 + e^{-2}}{e^2 - e^{-2}}$$

Obținem același rezultat.

d)

$$\lim_{x\to+\infty} (e^{2\operatorname{sh}^2 x} + e^{\operatorname{sh}x} + 1) = e^{2\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}^2 x} + e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}x} + 1 = e^{\infty} + e^{\infty} + 1 = +\infty$$

498. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln \operatorname{sh}x - \ln \operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}\ln x - \operatorname{ch}\ln x + 1}$

Soluție

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \operatorname{sh}x - \ln \operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}\ln x - \operatorname{ch}\ln x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}}{\dfrac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} - \dfrac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} + 1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{-e^{-\ln x} + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}}{-e^{-\ln x} + 1} = \frac{\ln 1}{-e^{-\infty} + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

499. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\operatorname{sh} \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}+1}$

Soluție

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\operatorname{sh} \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}+1} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\frac{1}{x}+1} = \left(\frac{e^0 - e^0}{2}\right)^{0+1} = 0$$

500. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 \cdot \log_2 \ln \operatorname{sh} 2x}{x - 1}$

Soluție $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 \cdot \log_2 \ln \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}}{x - 1} = \dfrac{2 \cdot \log_2 \ln \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}}{0} = +\infty$

501. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x) = +\infty$ (se utilizează formula de transformare a diferenței în produs)

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{cth} 4x} + \dfrac{1}{\operatorname{cth} 2x}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{cth} 4x \cdot \operatorname{cth} 2x}} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \operatorname{ch} \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^2 + e^{-2}}{2}$

502. Pentru ce valori ale lui α real avem $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{sech}(x - \alpha) = \lim\limits_{x \to 3} \operatorname{cosech}(x + \alpha)$?

R. $\alpha = \ln \sqrt{\dfrac{e^4 + 1}{e^4 - 1}}$

503. Calculați limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} e^{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\operatorname{ch}(x - 1)}$; c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\operatorname{th}(x + 2)}{\sqrt{-x}}$;

d) $\lim\limits_{x \to 4} 4 \cdot \operatorname{cth} \dfrac{x}{4}$; e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{ch} \sqrt{x})}{\operatorname{ch}(\operatorname{sh} \sqrt{x})}$, $a > 0$;

Scanned with OKEN Scanner

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} 2x}{\operatorname{cth} 5x}$

504. Să se arate că: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$

Soluție

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

505. Să se stabilească că $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sh} x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ch} x = 1$ și $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{th} x = 0$.

Soluție $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sh} x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{1 - 1}{2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ch} x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1 + 1}{2} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{th} x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - 1}{1 + 1} = 0$

Calculați limitele următoare:

506. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arg\,sh} \dfrac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{\operatorname{arg\,ch}(x^2 + 2x + 1)}{x - 1}$

Soluție

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arg\,sh} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}\right) = \ln(0 + \sqrt{0 + 1}) = \ln 1 = 0$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{\operatorname{arg\,ch}(x^2 + 2x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln(x^2 + 2x + 1 + \sqrt{(x^2 + 2x + 1)^2 - 1}) =$

$= \ln(4 + \sqrt{15})$

507. a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} \operatorname{arg\,th}(2^x \cdot \ln x)$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arg\,th}(\operatorname{sh} x)$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} \operatorname{arg\,th}(2^x \cdot \ln x)$ nu există deoarece $\ln \frac{1}{e} < 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{e}} \cdot \ln \frac{1}{e} < -1$

b

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arg\,th}(\operatorname{sh} x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + \operatorname{sh} x}{1 - \operatorname{sh} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + 0}{1 - 0} = \frac{1}{2} \cdot \ln 1 = 0$$

508. a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{x \cdot \operatorname{arg\,cth}(\cos x)}{x - \frac{\pi}{6}}$; b) $\lim\limits_{x \to 5} \operatorname{ch}(\operatorname{arg\,ch} x)$

Soluție

a) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{x \cdot \operatorname{arg\,cth}(\cos x)}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{x \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

Această limită nu există deoarece $\dfrac{\cos \frac{\pi}{6} + 1}{\cos \frac{\pi}{6} - 1} < 0$, iar logaritmul

nu este definit.

b) $$\lim_{x \to 5} \operatorname{ch}(\operatorname{arg\,ch} x) = \lim_{x \to 5} \operatorname{ch}[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})] =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{e^{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} + e^{-\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}}{2} = \frac{e^{\ln(5 + \sqrt{24})} + e^{-\ln(5 + \sqrt{24})}}{2}$$

509. Pentru ce valori ale lui α real avem

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arg\,sh} x = \lim_{x \to 0} \operatorname{arg\,th}(x + \alpha) \; ?$$

Soluție $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \ln \dfrac{1 + (x + \alpha)}{1 - (x + \alpha)} \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\cdot \ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

510. Calculați valoarea lui α real astfel încît: $\lim\limits_{x\to 0} \arg(\operatorname{sh} x + \alpha) = 2$.

Soluție

$$\lim_{x\to 0} \arg(\operatorname{sh} x + \alpha) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln(\operatorname{sh} x + \alpha + \sqrt{(\operatorname{sh} x + \alpha)^2 + 1}) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \alpha + \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha + 1) = 2 \Rightarrow \alpha + 1 = e^2 \Rightarrow \alpha = e^2 - 1$$

511. Calculați valoarea lui α pentru care $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arg \operatorname{sh}(x+\alpha)}{\arg \operatorname{th}(x-\alpha)} = 1$.

R. $\alpha = 0$.

512. Calculați: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arg \operatorname{sh}(\ln x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arg \operatorname{cth}(\ln x)$.

R. a) $+\infty$; b) 0

513. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arg \operatorname{sh}(\sin x + \cos x)}{\sin(\operatorname{sh} x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \arg \operatorname{th} x}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{[\arg \operatorname{sh}(x+\sqrt{x})] - 1}{x-2}$

R. a) $+\infty$; b) 0; c) $+\infty$

514. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 + \sqrt[n]{\left(\arg \operatorname{th}\dfrac{x}{2^n}\right)^{n+1}}\right]$, $x \in (-1, 1)$

R. 1.

515. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\arg \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)}{x - \frac{\pi}{4}}$

R. $+\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

IV.4 DEFINIȚIA CONTINUITĂȚII. CONTINUITATEA LA STÎNGA ȘI LA DREAPTA ÎN x_0. OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE

516. Fie funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin^2 \alpha - \dfrac{x}{e^{1-x}} \cdot \sin \alpha + \dfrac{x^2}{4}}, & \text{dacă } x \in [0, 1), 0 \le \alpha \le 2 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 1 \\ \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2 + x + 1}, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Pentru ce valoare a lui α, f este continuă în punctul $x = 1$?

Soluție Radicalul are sens, oricare ar fi α, deoarece

$$\left| \frac{x}{e^{1-x}} \cdot \sin \alpha \right| \le |x \cdot \sin x| \le \sin^2 x + \frac{x^2}{4}.$$

(S-a ținut seama că $e^{1-x} \ge 1$, dacă $1 > x \ge 0$, precum și de inegalitatea $2|a| \cdot |b| < a^2 + b^2$).

Avem:

$$L_s = f(1 - 0) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{x \cdot \sin \alpha}{e^{1-x}} + \frac{x^2}{4}} = \left| \sin \alpha - \frac{1}{2} \right|$$

$$L_d = f(1 + 0) = \frac{3}{2} \cdot \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2}$$

Funcția f este continuă în $x_0 = 1$, numai dacă satisface ecuația $\left| \frac{1}{2} - \sin \alpha \right| = \frac{1}{2}$, ale cărei soluții sînt:

$$\alpha = 0, \ \alpha = \frac{\pi}{2}, \ \alpha = \pi \text{ și } \alpha = 2\pi.$$

517. Să se arate că funcția $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + \sin x^3}}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ prezintă o

Scanned with OKEN Scanner

discontinuitate de speța I în $x_0 = 0$.

Soluție

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\sqrt{x^2 + \sin x^3}}{x} = -\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \sqrt{1 + x \cdot \frac{\sin x^3}{x^3}} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sqrt{x^2 + \sin x^3}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{1 + x \cdot \frac{\sin x^3}{x^3}} = 1$$

Cum $L_s \neq L_d$ (există, sînt finite și diferite) rezultă că avem o discontinuitate de speța I.

518. Să se arate că funcția $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are o discontinuitate de speța a II-a în origine.

Soluție $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$

519. Să se studieze continuitatea în punctul $x_0 = 1$ pentru fiecare din funcțiile următoare:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-1}, & \text{daca } x \neq 1 \\ 1, & \text{daca } x = 1 \end{cases}$

c) $f(t) = \frac{\sqrt[3]{t-1} - 2t}{t}$ pentru $t \neq 0$; $f(0) = 1$

d) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -\frac{1}{10^5} < t < 1 + \frac{1}{10^5} \\ 3, & \text{în rest} \end{cases}$

Soluție

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} x^2 = 1$; $\lim\limits_{x \searrow 1} (2x - 1) = 1$ și $f(1) = 1^2 = 1$, deci $L_s = L_d = f(1) = 1$ și ca atare f este continuă.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{5}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \searrow 1} \frac{5}{x-1} = +\infty$ și $f(1) = 1$. Funcția f este discontinuă în $x_0 = 1$.

c) Funcția f este definită și continuă în $\mathbb{R} - \{0\}$.

d) Funcția f este continuă în punctul $x = 1$ deoarece restricția ei la vecinătatea $\left(1 - \frac{1}{10^5}, 1 + \frac{1}{10^5}\right)$ a punctului $x_0 = 1$ este constantă deci continuă.

Să se studieze continuitatea funcțiilor următoare:

520. $f(x) = \begin{cases} x^n \cdot \sin \frac{1}{x^p}, n, p \in \mathbb{N}, & \text{dacă } x > 0 \\ -x^3 + x, & \text{dacă } x \le 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$.

Soluție $0 \le \left| x^n \cdot \sin \frac{1}{x^p} \right| \le |x|^n$ deci $L_s = 0$. Cum $L_d = 0$ și $f(0) = 0$, f este continuă în $x_0 = 0$.

521. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x+1}}}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \\ 0, & x = -1 \end{cases}$

Soluție În orice punct $x \neq -1$ funcția f este continuă. Să studiem continuitatea în punctul $x_0 = -1$.

$$\lim_{x \nearrow -1} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x+1}}} = 1 \; ; \quad \lim_{x \searrow -1} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x+1}}} = 0 \; ; \quad f(-1) = 0$$

Deci funcția f este continuă la dreapta în $x_0 = -1$ dar nu este continuă la stînga.

522. a) $f(x) = \frac{|2 + x| - |3 - x|}{|1 + x| + |4 - x|}$;

b) $f(x) = 1 + \ln \frac{|x| + 1}{|x - 1|}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{|\sin x| \cdot e^{nx} + \cos x}{e^{nx} + 1}$;

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Soluţie

a) Explicitînd funcţia se obţine:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2x-3}, & x \in (-\infty, -2] \\ \frac{-2x+1}{2x-3}, & x \in (-2, -1] \\ \frac{2x-1}{5}, & x \in (-1, 3] \\ 1, & x \in (3, 4] \\ \frac{5}{2x-3}, & x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

Funcţia f este continuă pe tot domeniul de definiţie.

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \ln\frac{1+x}{1-x}, & x \in (0, 1) \\ 1 + \ln\frac{x+1}{x-1}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Funcţia nu este continuă în $x_0 = 1$.

c) $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ |\cos x|, & x < 0 \end{cases}$

Funcţia este discontinuă în $x_0 = 0$.

d) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x+1}{x-1}, & x > 0, x \neq 1 \end{cases}$

Funcţia este discontinuă în $x_0 = 0$ şi $x_0 = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

523. Fie funcţia $f : \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}, & \text{dacă } x \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] - \{0\} \\ \alpha, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Cum trebuie ales α pentru ca funcţia să fie continuă în origine?

Soluţie Trebuie ca $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha$, adică $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \alpha$.

Însă $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x^2}{2}}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} \cdot \left|\sin \frac{x^2}{2}\right|}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$

Întrucît pentru orice valoare a lui x, $\frac{x^2}{2} > 0$ şi $\frac{x^2}{2} < \pi$, avem $\left|\sin \frac{x^2}{2}\right| = \sin \frac{x^2}{2}$ obţinem:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2 \dfrac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}}{\dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}} = \sqrt{2}$$

Pentru $\alpha = \sqrt{2}$ funcţia este continuă în întreg intervalul închis $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$.

524. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{\pi}{2 - x}, & \text{dacă } x \neq 2 \\ \alpha, & \text{dacă } x = 2 \end{cases}, \ \alpha \text{ constantă.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie $L_d = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2 - x} = -\frac{\pi}{2}$ deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{\pi}{2 - x} = -\infty$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{\pi}{2 - x} = +\infty$, $L_s = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2 - x} = \frac{\pi}{2}$.

Deci, oricum am alege constanta a, funcţia nu poate fi continuă în $x_0 = 2$. Ea este continuă pentru $x_0 \neq 2$.

525. Să se studieze continuitatea funcţiei $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot E(x)$ unde $E(x) = [x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Soluţie

$$E(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \in [0, 1) \\ 1 & , \text{ dacă } x \in [1, 2) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n-1 & , \text{ dacă } x \in [n-1, n) \\ n & , \text{ dacă } x \in [n, n+1) \end{cases}$$

$$x \cdot E(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \in [0, 1) \\ x & , \text{ dacă } x \in [1, 2) \\ 2x & , \text{ dacă } x \in [2, 3) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n-1)x & , \text{ dacă } x \in [n-1, n) \\ nx & , \text{ dacă } x \in [n, n+1) \end{cases}$$

Observăm că f este continuă în interiorul fiecăruia din intervalele $(n, n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Rămîne de cercetat continuitatea la capetele intervalelor, adică în punctele $x = n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$. Însă în punctul $x = n$ avem:

$$f(n - 0) = \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} f(x) = \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} (n-1)x = n(n-1)$$

$$f(n + o) = \lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} f(x) = \lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} nx = n^2 \; ; \quad f(n) = n^2$$

ceea ce stabileşte discontinuitatea funcţiei în punctul $x = n$. Funcţia este însă continuă la dreapta în punctul $x = n$.

526. Să se arate că $\forall x \in \mathbb{R}$ este bine definit numărul $\varphi(x) = \min\limits_{k \in Z} |x - k|$ şi că funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie Fixînd $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)$ este cea mai mică distanţă posibilă de la x la un număr întreg. Dacă $x \in [0, 1]$ se observă că:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$, apoi $\varphi(x+1) = \varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci φ este periodică de perioadă 1.

Se verifică direct continuitatea φ lui în punctele din $\mathbb{R} - Z$, iar în orice punct întreg k , $\varphi(k - 0) = \varphi(k + 0) = 0$.

Cercetaţi continuitatea funcţiilor următoare în punctele menţionate în dreptul fiecăreia: .

527. a) $f(x) = \begin{cases} x^n \cdot \sin^2 \frac{1}{x}, & \text{pentru } x \neq 0, \ n > 0 \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^{\left[\frac{1}{x}\right]}, & \text{pentru } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}, & \text{pentru } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ \frac{\sin(2x^2 - 1)\pi}{x^2 - 1}, & \text{pentru } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

R. a) Pentru $n \ge 1$, f este continuă pe $\mathbb{R}$; b) Funcţia este continuă în 0 şi în toate punctele domeniului, exceptînd pe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$; c) Funcţia f este continuă în $x_0 = -1$ şi discontinuă în $x_0 = 1$.

528. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - 1}, & x \in (-\infty, 0) \\ x \cdot \ln x, & x \in (0, 1) \\ -e^{-x} - e^{-1}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$

R. f este continuă peste tot cu excepţia lui $x_0 = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

529. a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}, & x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ -1, & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 0 \\ (x - 2) \cdot \dfrac{3}{2}, & x > 0 \end{cases}$

R. a) f este continuă pe $\mathbb{R}$; b) f este continuă pe $\mathbb{R}$.

530. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

R. $L_s = -1$, $L_d = 1$, $f(0) = 0$; f nu este continuă în origine.

531. Studiaţi continuitatea funcţiei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - E(x^2)$

R. f este continuă în $(\sqrt{n}, \sqrt{n+1})$ şi discontinuă în $x = \sqrt{n}$ avînd o discontinuitate de prima speţă în acest punct. f este continuă la dreapta în $x = \sqrt{n}$.

532. Studiaţi continuitatea funcţiilor:

a) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} (x^n + 1)$

b) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 + x^n}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x + x^2 \cdot e^{nx}}{1 + e^{nx}}$

R. a) f este discontinuă în $x_0 = 1$ deoarece $L_s = 1$, iar $f(1) = 2$;

b) f este discontinuă în $x_0 = 1$;

c) f este continuă pe $\mathbb{R}$.

533. Să se studieze continuitatea funcţiilor următoare:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ -x, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$

c) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ \operatorname{ctg} x, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$

d) $f : (e, e^4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = E(\ln x)$

R. a) continuă numai în $x_0 = 0$;

b) continuă numai în $x_0 = 1$;

c) continuă numai în $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

d) f discontinuă în $x = e^2$ și în $x = e^3$.

534. Să se determine valoarea constantei α, astfel încît funcția

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}x^2 + \alpha x + 1}, & x \geq 1 \\ 3 \cdot |\alpha| \cdot x, & x < 1 \end{cases}$ să fie continuă.

R. $\alpha = \frac{2}{5}$; $\alpha = -\frac{2}{7}$

535. Să se determine valoarea constantei α astfel încît funcția

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - E(x)}{x}, & \text{dacă } x \geq 2 \\ \{x\} + \alpha, & \text{dacă } x < 2 \end{cases}$ să fie continuă în punctul $x_0 = 2$.

R. Se ține seama de faptul că $x = E(x) + \{x\}$ și se obține $\alpha = 1$.

536. Să se studieze continuitatea funcțiilor compuse $f \circ g$ și $g \circ f$ în următoarele cazuri:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ și

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + x^2$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}$ și

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

a) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 , & x > 0 \\ 0 , & x = 0 \\ -1 , & x < 0 \end{cases}$

Deoarece $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, funcția $f[g(x)] = 1$ este continuă pe toată dreapta.

Dacă $x > 0$, $f(x) = 1$, $g[f(x)] = 1 + (f(x))^2 = 2$,

$x = 0$, $f(x) = 0$, $g[f(x)] = 1$,

$x < 0$, $f(x) = -1$, $g[f(x)] = 1 + (-1)^2 = 2$.

Prin urmare $g[f(x)]$ este discontinuă în $x = 0$.

b) Putem scrie: $f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 , & \text{dacă } -1 \le x \le 1 \\ 0 , & \text{dacă } x > 1 \text{ sau } x < -1 \end{cases}$

Funcția $f[g(x)]$ este definită în modul următor:

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1 , & \text{dacă } -1 \le g(x) \le 1 \\ 0 , & \text{dacă } g(x) > 1 \text{ sau } g(x) < -1 \end{cases}$$

Însă, dacă $-1 \le x \le 1$, $g(x) = 1$, deci $f[g(x)] = 1$, iar dacă $x < -1$ sau $x > 1$, $g(x) = 0$, iar $f[g(x)] = 1$.

Deci $\forall x \in \mathbb{R}$, $f[g(x)] = g[f(x)] = 1$. Observăm că deși ambele funcții sînt discontinue în $x = 1$ și $x = -1$, totuși funcția compusă este continuă pe toată dreapta.

537. Să se precizeze două funcții $f, g : E \to \mathbb{R}$ discontinue în x_0 încît $f + g$, fg să fie continue în x_0.

Soluție Considerăm următoarele două funcții:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad f(x) = \begin{cases} 1 , & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ -1 , & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases} \text{ și}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad g(x) = \begin{cases} -1 , & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 1 , & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

Funcțiile considerate sînt ambele discontinue pe toată dreapta reală în orice punct al ei, însă suma $f(x) + g(x) = 0$ este o funcție continuă pe toată dreapta.

$f(x) \cdot g(x) = -1$. Deci produsul a două funcții discontinue într-un punct poate fi o funcție continuă în acel punct.

538. Poate fi $f + g$ continuă în x_0 în care f este continuă, iar g este discontinuă?

Scanned with OKEN Scanner

Soluție Răspunsul este negativ. Dacă $s(x) = f(x) + g(x)$ ar fi continuă în x_0, ar rezulta că $g(x) = s(x) - f(x)$ ar fi diferența a două funcții continue în x_0, deci continuă în x_0, ceea ce contrazice ipoteza.

539. Să se arate că următoarele funcții sînt continue pe domeniile de definiție specificate:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + x^2$

b) $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

c) $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

Soluție

a) f este continuă pe $\mathbb{R}$ ca sumă a două funcții continue.

b) Funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ este continuă pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ pentru că este cîtul $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ a două funcții continue și numitorul nu se anulează pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

c) Orice funcție polinomială $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

540. Să se dea exemple de funcții care comută cu luarea limitei.

Soluție $\lim\limits_{x \to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$; $\lim\limits_{x \to x_0} \sin f(x) = \sin \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

$\lim\limits_{x \to x_0} \log_a f(x) = \log_a \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, etc.

541. Fie funcțiile $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ și $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = \ln y$. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} (g \circ f)(x)$.

Soluție $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln \frac{1}{x} = \ln \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = -\infty$

542. Să se studieze continuitatea funcțiilor compuse $g \circ f$ și $f \circ g$,

Scanned with OKEN Scanner

unde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ și $g(x) = x^3 - 4x$.

Soluție Fie $h = g \circ f$; h este discontinuă în $x_0 = 0$. Notăm $k = f \circ g$ deci

$$k(x) = f(x^3 - 4x) = \operatorname{sgn}(x^3 - 4x) = \begin{cases} 1 , & \text{dacă } x^3 - 4x > 0 \\ -1 , & \text{dacă } x^3 - 4x < 0 \\ 0 , & \text{dacă } x \in \{0, 2, -2\} \end{cases}$$

Funcția $f \circ g$ este discontinuă în punctele $x \in \{0, 2, -2\}$.

543. Fie $f : \mathbb{R} \to (-\infty , 1)$, $g : \mathbb{R} \to (1 , +\infty)$ două funcții continue pe $\mathbb{R}$. Să se demonstreze că dacă există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $x_1 < x_2$ astfel încît $f(x_1) = x_1$, $g(x_2) = x_2$ atunci există cel puțin un $x_3 \in (x_1 , x_2)$ astfel încît $f(x_3) \cdot g(x_3) = x_3$.

R. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$. Avem $h(x_1) > 0$, $h(x_2) < 0$. Cum h este continuă pe $\mathbb{R}$ și $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$ rezultă că $\exists\, x_3 \in (x_1 , x_2)$ astfel încît
$h(x_3) = 0 \iff f(x_3) \cdot g(x_3) = x_3$.

544. Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, f mărginită, discontinuă și g continuă în $x_0 \in I$, fixat. Atunci $f \cdot g$ este continuă în x_0 dacă și numai dacă $g(x_0) = 0$.

R. Pentru implicația directă se notează $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ și se presupune că $f \cdot g$ este continuă în x_0 și $g(x_0) \neq 0$. Se ajunge la o absurditate.

Pentru implicația reciprocă se ține seamă că $|f(x)| \leq m$, $\forall\, x \in I$. Deoarece g este continuă în x_0 și $g(x_0) = 0$, există o vecinătate V a lui x_0 cu $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{m}$, $\varepsilon > 0$, $\forall\, x \in V \cap I$ deci:

$$|(f \cdot g)(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon \Rightarrow f \cdot g \text{ continuă în } x_0.$$

545. Se dă o funcție $f : \mathbb{R} \to [0 , +\infty)$ continuă pe $\mathbb{R}$, cu proprietățile $f(0) = 1$ și $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - f(nx)}{x^2} = a_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - f(x) \cdot \sqrt{f(2x)} \cdot \sqrt[3]{f(3x)} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{f(nx)}}{x^2}$, știind că această limită există și este finită, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

R. Se notează cu

$E_n = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - f(x) \cdot \sqrt{f(2x)} \cdot \sqrt[3]{f(3x)} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{f(nx)}}{x^2}$ și se obține relația de recurență $E_n = E_{n-1} + \dfrac{a_n}{n}$, $n \geq 2$ de unde rezultă $E_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{k}$.

546. Aplicînd operațiile cu funcții continue să se studieze continuitatea funcției

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(x-1) \cdot \sin \dfrac{1}{x-1}, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \dfrac{\cos \dfrac{1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x-1}}}, & x > 1 \end{cases}$$

în $x_0 = 1$.

R. f este continuă în $x_0 = 1$.

IV.5 PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE. PROPRIETATEA LUI DARBOUX

547. Fie $a < b$. Să se arate că ecuația $(x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - a) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a, b).

Soluție Fie

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - a)$$

Deoarece $f(a) = (a^2 + 1)(a - b) < 0$, $f(b) = (b^4 + 1)(b - a) > 0$ atunci funcția f se anulează cel puțin o dată pe intervalul (a, b).

Scanned with OKEN Scanner

548. Fie $a < b < c$ fixate. Să se arate că ecuația $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$ are o soluție cuprinsă în (a, b) și o a doua în (b, c).

Soluție Fie

$$g : \mathbb{R} - \{a, b, c\} \to \mathbb{R},$$
$$g(x) = (x-b)(x-c) + 2(x-c)(x-a) + 3(x-a)(x-b)$$

Avem $g(a) = (a-b)(a-c) > 0$, $g(b) < 0$, $g(c) > 0$ etc.

549. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval arbitrar cu extremitățile a și b și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ și $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ există și sînt egale între ele. Atunci f își atinge maximul sau minimul pe I.

Soluție Fie $m = \inf f(I)$, $M = \sup f(I)$ și $L = f(a+0) = f(b-0)$. Dacă $m = M$, atunci f este constantă și afirmația este evidentă.

Presupunem $m < M$. Evident $m \leq L \leq M$, deci $m < L$ sau $L < M$; considerăm $L < M$. Fie V o vecinătate a lui L care nu conține pe M. Cum $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) < M$ și $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) < M$, există $[c, d] \subseteq I$ astfel încît $f(x) \in V$, și $f(x) \in V$, $\forall x \in (d, b)$.

Deci $f(x) < M$, $\forall x \in (a, c) \cup (d, b)$.

Atunci $\sup f(I) = \sup f([c, d])$. Rezultă că $x_0 \in [c, d]$ astfel încît $\sup f([c, d]) = f(x_0)$, deci există $x_0 \in I$ astfel încît $\sup f(I) = f(x_0)$.

Dacă $L < M$, atunci f își atinge maximul, iar dacă $m < L$, atunci f își atinge minimul, într-un punct din I.

550. Să se arate că ecuația $(x+1) \cdot 2^{x+1} = 1$ admite cel puțin o rădăcină reală cuprinsă în intervalul $[-1, 0]$.

Soluție Se consideră funcția $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ dată de legea $f(x) = (x+1) \cdot 2^{x+1} - 1$. Avem $f(-1) = -1$; $f(0) = 1$. Deci $f(-1) \cdot f(0) < 0$ ceea ce ne arată că funcția f continuă pe $[-1, 0]$ are cel puțin un zero în acest interval.

Scanned with OKEN Scanner

551. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n \geq 1$. Atunci există cel puțin un punct și cel mult n puncte $x_0 \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $|P(x_0)| \leq |P(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Soluție Funcția $f(x) = |P(x)|$, $x \in \mathbb{R}$, este continuă și $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Evident $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ astfel încît f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe $(-\infty, a)$ (respectiv pe $b, +\infty)$), deci avem $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$. Fie $x_0 \in [a, b]$ cu $f(x_0) \leq f(x)$,$\forall x \in [a, b]$.

Atunci avem $|P(x_0)| \leq |P(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ecuația $P(x) = \lambda$ avînd cel mult n soluții reale, pentru $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, rezultă imediat că există cel mult n puncte $x_0 \in \mathbb{R}$ cu proprietatea dată.

552. Se consideră funcția continuă $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, astfel încît $f(0) = f(2\pi)$. Să se arate că există un punct $c \in (0, 2\pi)$, astfel încît $f(c) = f(c + \pi)$.

Soluție Construim funcția $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dată de legea $g(x) = f(x) - f(x + \pi)$.

Să calculăm:

$g(0) = f(0) - f(\pi)$; $g(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0)$.

Deoarece g este funcție continuă cu proprietatea $g(0) \cdot g(\pi) < 0$, rezultă că există $c \in (0, \pi)$, astfel încît $g(c) = 0$ deci, $f(c) = f(c + \pi)$.

553. Dați un exemplu de funcție care dacă nu îndeplinește una din condițiile teoremei lui Weierstrass de mărginire nu își atinge o margine.

Soluție Fie $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ Funcția este mărginită pe $(0, 1]$ dar nu își atinge marginea inferioară $m = 0$, deoarece intervalul nu este închis la stînga.

554. Arătați că ecuația $x^3 - 3x + 1 = 0$ posedă în intervalul $(1, 2)$ o rădăcină reală. Calculați cu aproximație valoarea acestei rădăcini.

R. 1,53

Scanned with OKEN Scanner

555. Fie funcțiile continue $f : [a, b] \to [a, b]$ și $g : [a, b] \to [a, b]$ cu proprietatea $g(a) = a$, $g(b) = b$. Să se arate că ecuația $f(x) = g(x)$ are cel puțin o rădăcină.

R. Se consideră funcția $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dată de $h(x) = f(x) - g(x)$. Se arată că $h(a) \cdot h(b) \leq 0$.

556. Să se studieze semnul următoarelor funcții:

a) $f(x) = x(x - a)(x - b)$ unde $0 < a < b$, constante

b) $f(x) = (x + 1) \cdot \ln(-x)$, $x < 0$

c) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$

d) $f(x) = \operatorname{sh} x$

R.

a) Pe $(-\infty, 0)$, (a, b), f este negativă iar pe $(0,a)$, $(b, +\infty)$ este pozitivă;

b) Pe ambele intervale $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ f este negativă;

c) Pe $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$, $f \geq 0$ iar pe $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, $f < 0$;

d) $f < 0$ pe $(-\infty, 0)$ și $f > 0$ pe $(0, +\infty)$.

557. Să se dea un exemplu de funcție cu proprietatea lui Darboux și necontinuă.

Soluție Fie

$$f : \left[-1, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0) \\ x + \frac{1}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Fie $-1 < a < b < 0$; avem $f(a) = a + 1$ și $f(b) = b + 1$. Fie $f(a) < \lambda < f(b)$, deci $a + 1 < \lambda < b + 1$. Trebuie să arătăm că $\exists\, c \in (a, b)$ astfel încît $f(\xi) = \lambda$, deci să arătăm că ecuația $c + 1 = \lambda$ are o rădăcină în intervalul (a, b). Dar $c = \lambda - 1$, ori $a < \lambda - 1 < b$, deci $c \in (a, b)$.

Analog pentru $0 < a < b < \frac{1}{2}$.

Fie acum $-1 < a < 0$, $0 < b < \frac{1}{2}$, deci $f(a) = a + 1$,

Scanned with OKEN Scanner

$f(b) = b + \frac{1}{2}$. Fie $a + 1 < \lambda < b + \frac{1}{2}$. Trebuie să arătăm că ecuația $f(x) = \lambda$ are o soluție în (a , b). Se observă că dacă $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, atunci ecuația $f(x) = \lambda$ are două soluții $a < c_1 < 0$; $0 < c_2 < b$.

Dacă $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, ecuația $f(x) = \lambda$ are o singură soluție $c \in (a , 0)$.

Evident, $f(x)$ nu este continuă în $x_0 = 0$.

558. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux care nu se anulează în nici un punct. Atunci f păstrează un semn constant pe I.

Soluție Presupunem că $\exists\, a, b \in I$ astfel încît $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$. Atunci $\lambda = 0 \in [f(a) , f(b)]$ deci există $c \in [a , b]$ astfel încît $f(c) = \lambda$. Aceasta este absurd deoarece $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$. Prin urmare $f(I) \subset \mathbb{R}_+$ sau $f(I) \subset \mathbb{R}_-$.

Deci f păstrează un semn constant pe I.

559. Dacă două funcții f_1 și f_2 au în intervalul (α , β) proprietatea lui Darboux, atunci suma lor $S = f_1 + f_2$ va mai avea în intervalul (α , β) această proprietate?

Soluție Fie funcțiile

$$f_1 : [0 , 1] \to \mathbb{R} \ , \quad f_1(x) = \begin{cases} 1 & , \ x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & , \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_2 : [0 , 1] \to \mathbb{R} \ , \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 & , \ x = 0 \\ -\sin \frac{1}{x} & , \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Se observă că cele două funcții au proprietatea lui Darboux pe intervalul $[0 , 1]$.

Funcția sumă

$$S : [0 , 1] \to \mathbb{R} \ , \quad S(x) = f_1(x) + f_2(x) = \begin{cases} 2 & , \ x = 0 \\ 0 & , \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

nu se mai bucură de această proprietate.

Scanned with OKEN Scanner

560. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție monotonă astfel încît $f(I)$ este un interval. Să se arate că f are proprietatea lui Darboux.

Soluție Presupunem că f este monoton crescătoare cu $a, b \in I$, $a < b$ și $\gamma \in (f(a), f(b))$. Deoarece $f(a)$, $f(b) \in J = f(I)$ și J interval, rezultă că $[f(a), f(b)] \subseteq J$ și deci $\gamma \in J$ și $\exists\, c \in I$ astfel încît $f(c) = \gamma$.

Dacă $c < a$ (respectiv $c > b$) atunci $\gamma = f(c) \leq f(a)$ (respectiv $\gamma = f(c) \geq f(b)$) deci $\gamma \notin (f(a), f(b))$, absurd.

Rămîne că $c \in [a, b]$ și f are proprietatea lui Darboux.

561. Un exemplu dat de Lebesgue care afirmă că nu orice funcție care se bucură de proprietatea lui Darboux este și continuă (funcție discontinuă, cu proprietatea lui Darboux).

Soluție Fie intervalul $(0, 1)$ și un punct $x \in (0, 1)$ în scriere zecimală $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$

Fie funcția f definită în intervalul $(0, 1)$ în modul următor:

1) dacă șirul zecimalelor de rang impar: $a_1, a_3, a_5, \ldots$, este începînd de la un anumit rang $2n - 1$, periodic, atunci $f(x) = 0, a_{2n} a_{2n+2} a_{2n+4} \ldots$

2) dacă șirul precedent nu este periodic, atunci $f(x) = 0$.

Vom arăta că în orice interval (α, β) de lungime δ, $0 < \alpha < \beta < 1$, funcția f trece prin toate valorile cuprinse între zero și unu, inclusiv valorile zero și unu.

Într-adevăr, fie $y_0 \in [0, 1]$ pe care îl vom scrie în scriere zecimală sub forma $y_0 = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. Dacă $y_0 = 1$, atunci vom scrie $y_0 = 0,999 \ldots$

Vom arăta că există un număr $x_0 \in (\alpha, \beta)$, astfel încît să avem $f(x_0) = y_0$. Fie $x_0 = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ un număr arbitrar din (α, β) în scriere zecimală.

Să punem $\delta = \min [|\alpha - x|, |\beta - x|]$ și să considerăm șirul $a_1, a_3, a_5 \ldots$. Dacă acest șir nu este, începînd de la un anumit rang $2n - 1$, periodic, putem construi un număr $x' \in (\alpha, \beta)$, $x' = 0, a'_1 a'_2 a'_3 \ldots$, astfel încît șirul zecimalelor de rang impar $a'_1, a'_3, a'_5, \ldots$ să se bucure de această proprietate.

Pentru aceasta este suficient să determinăm numărul natural n

Scanned with OKEN Scanner

prin condiția $\frac{1}{10^{2n-2}} < \frac{\delta}{2}$ și să schimbăm în șirul $a_1, a_3, a_5, \ldots$ cifrele, începînd de la rangul $2n-1$, prin cifrele unui șir periodic oarecare $a'_{2n-1}, a'_{2n+1}, \ldots$

Luînd $x' = 0, a_1 a_2 \ldots a_{2n-2} a'_{2n-1} a_{2n} a'_{2n+1}$ vom avea $|x' - x| < \frac{1}{10^{2n-2}} < \frac{\delta}{2}$, deci $x' \in (\alpha, \beta)$.

Reciproc: Dacă șirul de zecimale $a_1, a_3, a_5, \ldots$ este periodic putem pierde perioada înlocuind, de exemplu, pe a_{2n-1} printr-o altă cifră a'_{2n-1} și obținem un număr $x' = 0, a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} a'_{2n-1} a_{2n} \ldots$ pentru care $|x - x'| < \frac{1}{10^{2n-2}} < \frac{\delta}{2}$, deci $x' \in (\alpha, \beta)$.

Prin urmare, oricare ar fi intervalul $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$, putem găsi în acest interval un număr x care să se bucure fie de proprietatea indicată la punctul 1), fie de proprietatea indicată la punctul 2).

În asemenea condiții, dacă $y_0 = 0$, vom lua în intervalul (α, β) un număr x_0 care să îndeplinească condiția 2) și vom avea $f(x_0) = y_0 = 0$.

Dacă $0 < y_0 \leq 1$, vom lua în (α, β) un număr x care să îndeplinească condiția 1): $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$.

Numărul δ avînd semnificația de mai înainte, vom considera numărul $x_0 = 0, a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} b_1 a_{2n+1} b_2 a_{2n+3} \ldots$ în care n este determinat prin condiția $\frac{1}{10^{2n-2}} < \delta$. Atunci $|x - x_0| < \frac{1}{10^{2n-2}} < \delta$ deci $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Conform condiției vom avea $f(x_0) = y_0$ și afirmația este justificată. Funcția considerată se bucură de proprietatea lui Darboux, deoarece pentru orice interval (α, β) cu $f(\alpha) \neq f(\beta)$ această funcție trece prin toate valorile cuprinse între $f(\alpha)$ și $f(\beta)$. Funcția considerată este însă discontinuă în orice punct al intervalului $(0, 1)$ deoarece în orice interval $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ oscilația sa este egală cu unu.

562. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux, $m = \inf f(I)$ și $M = \sup f(I)$. Atunci $(m, M) \subset f(I)$.

Soluție Fie $m < \gamma < M$ fixat.

Scanned with OKEN Scanner

Din definiția marginii inferioare (respectiv superioare) există x_1 (respectiv x_2) în I astfel încît $f(x_1) < \gamma$ (respectiv $f(x_2) > \gamma$). Deoarece $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$ și f are proprietatea lui Darboux, $\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f(x_0) = \gamma$.

Evident $x_0 \in I$ deci $\gamma = f(x_0) \in f(I)$ și deci $(m, M) \subseteq f(I)$.

563. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, se anulează într-un punct $0 < \xi < 1$.

Soluție Avem $f(1) = 1 \cdot 2^1 - 1 = 1$, $f(0) = 0 \cdot 2^0 - 1 = -1$. Există deci $\xi \in (0, 1)$ astfel ca $f(\xi) = 0$.

Proprietatea lui Darboux nu ne dă și un procedeu practic de a obține valoarea lui ξ.

564. Să se rezolve ecuația $16^{-|x-3|} - 3 \cdot 4^{-|x-3|} - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Soluție Notînd $4^{-|x-3|} = y$, se obține ecuația $y^2 - 3y - a = 0$ cu $0 < y \leq 1$. Dacă $a > -\frac{9}{4}$, ecuația $y^2 - 3y - a = 0$ admite soluțiile reale y_1 și y_2 ($y_1 < \frac{3}{2}$ și $y_2 > \frac{3}{2}$). În cele ce urmează ne interesează numai soluția y_1, deoarece $0 < y \leq 1$.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(y) = y^2 - 3y - a$; funcția f fiind strict descrescătoare pe $(-\infty, \frac{3}{2})$ și strict crescătoare pe $(\frac{3}{2}, +\infty)$, rezultă că $f(1) < f(0)$.

Funcția f fiind continuă și descrescătoare pe $[0, 1]$ se va anula în intervalul $[0, 1]$ dacă și numai dacă $f(0) > 0$ și $f(1) < 0$, deci dacă $-2 < a < 0$; deoarece $f(1) = 0$ pentru $a = -2$, rezultă că pentru $-2 \leq a < 0$ ecuația $f(y) = 0$ admite o soluție $y_0 \in (0, 1]$.

$$y_0 = \frac{3 - \sqrt{9 + 4a}}{2} = \frac{1}{4^{|x-3|}}$$

Din egalitatea precedentă rezultă: $4^{|x-3|} = \frac{2}{3 - \sqrt{9+4a}}$, deci

$$|x - 3| = \log_4 \frac{2}{3 - \sqrt{9+4a}} \text{ și } x = 3 \pm \log_4 \frac{2}{3 - \sqrt{9+4a}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

565. Exemple, fără demonstrație, de funcții care posedă (sau nu) proprietatea lui Darboux.

a) Funcțiile trigonometrice au proprietatea lui Darboux.

b) Funcția $x \to x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux.

c) Funcția $x \to \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux.

d) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } x \in Q \\ 0 & , \text{ dacă } x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$ numită funcția lui Dirichlet nu are proprietatea lui Darboux.

e) Funcția $f : [0 , 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & , x \in [0 , 1] \\ x - 1 & , x \in (1 , 2] \end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux.

566. Fie I un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux. Să se arate că dacă f are limite laterale în orice punct din I, atunci f este continuă pe I.

Soluție Admitem prin absurd că f nu ar fi continuă într-un punct $x_0 \in I$. Conform ipotezei, două din numerele $L_s = f(x_0 - 0)$, $L_d = f(x_0 + 0)$, $f(x_0)$ sînt distincte.

Să presupunem de exemplu că $f(x_0) < L_s$ și fie $\varepsilon = L_s - f(x_0)$. Atunci $\exists\, \delta > 0$ astfel încît dacă $x \in (x_0 - \delta , x_0)$ atunci $L_s - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < L_s + \frac{\varepsilon}{2}$, adică $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{3\varepsilon}{2}$.

Fixăm $x_1 \in (x_0 - \delta , x_0)$, deci $f(x_1) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux pe I, odată cu valorile $f(x_0)$, $f(x_1)$, funcția f ia valoarea intermediară $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$, adică $\exists\, c \in (x_1 , x_0)$ astfel încît $f(c) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$.

Dar $f(c) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ adică $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$, ceea ce este absurd.

567. Folosind proprietatea lui Darboux, să se determine mulțimea valorilor următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $I = [0 , +\infty)$

Scanned with OKEN Scanner

b) $f(x) = x^{2n-1}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \sin x$, $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

e) $f(x) = \cos x$, $I = [0, \pi]$

f) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $I = (0, \pi)$

Soluție

a) $f(0) = 0$, $m = \inf\limits_{x \geq 0} x^n$; $M = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, deci $M = \sup\limits_{x \geq 0} x^n = +\infty$. Cum $m = 0 \in f(I)$, rezultă că $f(I) = [0, +\infty)$.

b) f este continuă, avem: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2n-1} = +\infty$, deci, $m = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} x^{2n-1} = -\infty$, $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} x^{2n-1} = +\infty$. Deci $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

c) f este continuă, avem: $a > 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, deci $m = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} a^x = 0$, $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} a^x = +\infty$. Cum a^x nu ia valoarea 0, rezultă că $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

Cazul $0 < a < 1$ se demonstrează analog.

d) f este continuă, avem: $-1 \leq f(x) \leq 1$, deci $(-1, 1) \subset f(I)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, deci $-1 \in f(I)$ și $1 \in f(I)$, deci $f(I) = [-1, 1]$.

e) f este continuă, iar $f(I) = [-1, 1]$.

f) f este continuă $\lim\limits_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$, deci $m = \inf\limits_{x \in I} \operatorname{tg} x = -\infty$, $M = \sup\limits_{x \in I} \operatorname{tg} x = +\infty$ deci $f(I) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

g) f este continuă. Rezultă că $f(I)$ este un interval și se demonstrează analog cu f) că $f(I) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

568. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că există $t \in (a, b)$ astfel încît $f(t) = \frac{1}{a - t} + \frac{1}{b - t}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție Definim $g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{1}{a-t} + \frac{1}{b-t}$, f fiind continuă pe un interval compact este mărginită și deci $(g-f)(a+) = -\infty$, $(g-f)(b-) = +\infty$. Din proprietatea lui Darboux rezultă că $\exists t \in (a,b)$ astfel încît $(g-f)(t) = 0$.

569. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Să se arate că nu există nici o funcție continuă $f : I \to \mathbb{R}$, care să ia fiecare valoare exact de două ori.

Soluție Fie $a, b \in I$, $a < b$ și $f(a) = f(b)$; de aici $\forall x \in I - \{a,b\}$, $f(x) \neq f(a) = f(b)$.

Dacă ar exista x' și x'' astfel încît $a < x' < x'' < b$ și $f(x') < f(a) < f(x'')$, atunci cum f are proprietatea lui Darboux pe (x', x'') ar exista $x \in (x', x'')$ astfel încît $f(x) = f(a) = f(b)$, ceea ce este absurd.

Rezultă că $f(a) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ sau $f(a) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Facem o alegere admițînd că $f(a) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$; cum $[a,b]$ este compact, există $c \in (a,b)$ astfel încît $f(c) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Prin ipoteză $\exists$ un $d \in I$, $d \neq c$ astfel încît $f(d) = f(c)$. Pot exista doar următoarele situații: $a<c<d<b$, $a<c<b<d$, $d<a<c<b$. Vom examina numai prima situație deoarece pentru celelalte se procedează analog.

Ținînd seama de faptul că f are proprietatea lui Darboux și punctele a, b, c, d sînt puncte de extrem, avem:
$f([c,d]) \subset f([a,c]) \cap f([d,b])$, de unde rezultă că $\forall x \in (c,d)$, $\exists$ punctele $x' \in (a,c)$, $x'' \in (c,d)$ astfel încît $f(x) = f(x') = f(x'')$, ceea ce contrazice ipoteza că f ia aceeași valoare exact în două puncte distincte.

570. Funcțiile continue pe o reuniune de intervale nu au în general proprietatea lui Darboux.

Soluție Funcția $f(x) = \begin{cases} -x-2, & x \in [-2,-1] \\ x+2, & x \in [1,2] \end{cases}$ este continuă pe intervalele compacte $[-2,-1] \cup [1,2]$ însă nu are proprietatea lui Darboux deoarece $f(x)$ nu ia nici o valoare cuprinsă între -1 și 1.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea de definiție este compactă însă este reuniunea a două intervale disjuncte.

571. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Să se arate că $C_I = D_I \cap C_I^*$, unde C_I, D_I, C_I^* sînt respectiv clasele de funcții continue, Darboux, cu valoarea absolută continuă, definite pe I.

Soluție Se știe că $C_I \subset D_I \cap C_I^*$ și rămîne de arătat numai incluziunea inversă.

Fie deci $f : I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea lui Darboux și $|f|$ continuă. Dacă $x \in I$, $f(x) = 0 = |f|(x)$, atunci $\forall x_n \in I$, $x_n \to 0$, din continuitatea funcției $|f|$ rezultă că $|f|(x_n) \to 0$, de unde $f(x_n) \to 0$, ceea ce arată că f este continuă în astfel de puncte. Dacă $f(x) \neq 0$, să presupunem că $f(x) > 0$. Dacă în orice interval deschis J, funcția f ar lua și valori negative, cum are și proprietatea lui Darboux în orice asemenea interval ar exista $x' \in J$ cu $f(x') = 0$.

Luînd un șir $J_{n'}$, cu $J_{n'} \cap J_n = \{x\}$, ar exista $x_n \in J_{n'}$, $x_n \to x$ și $|f|(x) = |f(x_n)| = 0 \to 0 \neq |f|(x) > 0$ ceea ce contrazice ipoteza că $|f|$ este continuă.

Deci există un interval J astfel încît $f(y) > 0$, oricare ar fi $y \in J$. Atunci $|f|_J = f_J$, de unde evident f este continuă în $x \in J$.

572. Fie I un interval deschis și D_I mulțimea funcțiilor Darboux definite pe I. Să se arate că: $f \in D_I = (\forall x)(\exists x_n)(\exists y_n)$ $(x \in I$ și $x_n, y_n \in I - \{x\}$ și $x_n < x < y_n$ și $x_n, y_n \to f(x_n)$, $f(y_n) \to f(x))$ dar implicația opusă este falsă.

Soluție Intervalul I fiind deschis, $(\forall x \in I)$, $(\exists n' \in \mathbb{N})$ astfel încît pentru $n \geq n'$ să avem $I_n = \left(\frac{x-1}{n}, \frac{x+1}{n}\right) \subset I$, de unde luînd $\frac{x-1}{n} < x_n < x < y_n < \frac{x+1}{n}$, rezultă $x_n, y_n \to x$ și $f(x_n), f(y_n), f(x) \in f(I_n)$.

Dar $\bigcap_{n \geq n'} f(I_n) = \{f(x)\}$, deoarece

$$f_{I_{n'}}^{-1}\left(\bigcap_{n \geq n'} f_{I_n}(I_n)\right) = \bigcap_{n \geq n'} \left(f_{I_n}^{-1} \cdot f_{I_n}\right)(I_n) = \bigcap_{n \geq n'} I_n = \{x\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că $f(x_n), f(y_n) \to f(x)$.

Implicația inversă este în general falsă, funcția lui Dirichlet fiind un exemplu în acest sens.

573. Să se arate că mulțimea valorilor funcției continue $f(x) = 1 + \sin x$, $x \in (0, 2\pi)$ este un segment.

Soluție Trebuie să arătăm că $f(x)$ are proprietatea lui Darboux. Observăm că $M = 2$ și $m = 0$. Fie $y \in [0,2]$. Ecuația $1 + \sin x = y$, $\sin x = y - 1$ are totdeauna cel puțin o soluție, deoarece $-1 < y - 1 < 1$, $y \in [0,2]$.

574. Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe $[a,b]$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt n valori din acest interval există un punct $\xi \in (a,b)$ cu

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n)).$$

Soluție Deoarece $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$, ea este mărginită și există două puncte $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ în care $f(\xi_1) = m$, $f(\xi_2) = M$, m, M fiind marginile inferioară și superioară ale funcției f pe $[a,b]$. Deci $m < f(x) < M$, $\forall x \in [a,b]$, $x \neq \xi_1, \xi_2$. Putem scrie că $nm < f(x_1) + \ldots + f(x_n) < nM$ sau încă $m < \dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} < M$; în baza proprietății lui Darboux pe care o posedă funcțiile continue există un punct $\xi \in (a,b)$ cu $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$.

575. Se dă funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ care are proprietatea lui Darboux. Dacă m, M sînt marginile inferioară și superioară ale lui f și dacă f^{-1} există pe $[m,M]$, atunci f este strict monotonă și continuă pe $[a,b]$.

Soluție Să observăm că pentru $x', x \in [a,b]$, $x' \neq x$ avem $f(x') \neq f(x)$ altfel f^{-1} nu ar fi definită pentru $x' = x$. Aceeași neegalitate arată că f nu este constantă pe subintervalele din $[a,b]$, iar dacă este monotonă existența lui f^{-1} spune că este strict monotonă.

Fie $\alpha \in (a,b)$, $\beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$. Să arătăm că dacă $f(a) < f(b)$ atunci $f(a) < f(\alpha) < f(b)$ și $f(\alpha) < f(\beta)$. Conform enunțului, f trece prin toate valorile cuprinse între $f(a)$ și $f(b)$, o singură

Scanned with OKEN Scanner

dată; dacă $f(\alpha) < f(a)$, atunci ar exista un punct $\gamma \in (a,b)$ în care funcția ar lua valoarea $f(a)$, ceea ce nu se poate; prin urmare trebuie să avem $f(\alpha) > f(a)$.

La fel se arată că $f(b) < f(\beta)$ și $f(\alpha) < f(\beta)$, deci f este strict crescătoare pe $[a,b]$.

Să presupunem acum că f nu este continuă în punctul $x_0 \in (a,b)$ și $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$, deci f^{-1} nu este definită pe intervalul $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ ceea ce este în contradicție cu enunțul. Urmează $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

576. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea lui Darboux. Atunci $\forall x_1, x_2 \ldots x_n \in I$ există $\xi, \eta \in I$ astfel încît:

$$\left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\right]^{\frac{1}{n}} = f(\xi) \text{ și } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(\eta).$$

Soluție Se observă că:

$$[\min_{1 \le i \le n} f(x_i)]^n \le \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \le [\max_{1 \le i \le n} f(x_i)]^n$$

$$n \cdot \min_{1 \le i \le n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le n \cdot \max_{1 \le i \le n} f(x_i)$$

Deoarece f are proprietatea lui Darboux rezultă că $J = f(I)$ este un interval. Cum $f(x_i) \in J$, $\forall 1 \le i \le n$ avem $m = \min_{1 \le i \le n} f(x_i)$, $M = \max_{1 \le i \le n} f(x_i) \in J$ deci din inegalitățile de mai sus deducem că:

$$\left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\right]^{\frac{1}{n}}, \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \in [m, M] \subseteq J$$

Deoarece $J = f(I)$ rezultă că există $\xi, \eta \in I$ astfel încît $f(\xi) = \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\right]^{\frac{1}{n}}$, $f(\eta) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ deci am obținut relațiile căutate.

577. Să se cerceteze dacă următoarele funcții au proprietatea lui Darboux:

a) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$

Scanned with OKEN Scanner

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \le 0 \\ \sin \frac{1}{x} & , x > 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & , x > 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , x < 0 \\ 0 & , x = 0, x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{x} & , x > 0 \end{cases}$

R. a) da; b) da; c) nu; d) nu.

578. Fie $f : [-a, a] \to [-a, a]$ o funcție continuă. Folosind proprietatea lui Darboux să se arate că există cel puțin un punct $b \in [-a, a]$ astfel încît $f(b) = b$ și cel puțin un punct $c \in [-a, a]$ astfel încît $f(c) = -c$.

IV.6 FUNCȚII UNIFORM CONTINUE

579. Să se dea un exemplu de funcție continuă pe un interval dar nu uniform continuă pe acel interval.

Soluție Fie $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, f continuă pe $(0, 1]$. Funcția nu este uniform continuă pe $(0, 1]$. Într-adevăr, dacă

$x_p = \frac{2}{(2p + 1)\pi}$, $x'_p = \frac{2}{(2p + 3)\pi}$, $p \in \mathbb{N}$, $\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}$

astfel încît $|x_p - x'_p| < \delta$, deoarece șirurile x_p , x'_p sînt convergente către 0 cînd $p \to +\infty$, însă $\sin \frac{1}{x_p} - \sin \frac{1}{x'_p} = 2$ deci funcția $\sin \frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

580. Fie funcția $f(x) = x^2$ continuă pe $[0,1]$. Să se arate că este și uniform continuă pe $[0,1]$, folosind definiția.

Soluție Fie $x_0 \in [0,1]$. $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ sau $|x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon$ sau $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{x + x_0}$.

Pentru $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{1 + x_0}$ și $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Se vede că $\delta(\varepsilon)$ depinde și de x_0. Dacă luăm pentru $\delta(\varepsilon)$ valoarea minimă cînd $x_0 \in [0,1]$ anume $\delta^* = \dfrac{\varepsilon}{2}$, atunci $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall x, x_0 \in [0,1]$.

Prin urmare $f(x) = x^2$ este uniform continuă pe $[0,1]$.

581. Să se arate că funcția $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, $x \neq 1$ nu este uniform continuă în intervalul $(1,2)$ dar este uniform continuă în intervalul $[2,3]$.

Soluție Dacă f ar fi uniform continuă pe $[1,2]$ ar trebui ca pentru $\forall \varepsilon > 0$ să $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice $x', x'' \in [1,2]$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Să considerăm $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ și $x' = 1 + \dfrac{1}{n}$, $x'' = 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Dar $x', x'' \in (1,2)$ și pentru n suficient de mare ele sînt situate la o distanță oricît de mică unul de altul.

Avem $|f(x') - f(x'')| = 1 > \dfrac{1}{2}$. Deci diferența $|f(x') - f(x'')|$ nu poate fi făcută mai mică decît $\dfrac{1}{2}$.

Să arătăm aplicînd definiția că funcția este uniform continuă pe $[2,3]$.

Fie $x', x'' \in [2,3]$, $x' < x''$. Avem

$$f(x') - f(x'') = \frac{1}{x' - 1} - \frac{1}{x'' - 1} = \frac{x'' - x'}{(x' - 1)(x'' - 1)} < x'' - x'$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ pe care îl luăm egal cu $\frac{\varepsilon}{2}$ astfel ca pentru $\forall x', x'' \in [2,3]$ astfel ca $|x' - x''| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Să se studieze uniform continuitatea următoarelor funcţii:

582. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 + 1} \cdot \sin^2 x^3$, $x \in [0, +\infty)$.

Soluţie Considerăm

$$x_k' = \sqrt[3]{2k\pi} \quad , \quad x_k'' = \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Diferenţa

$$|x' - x''| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{(2k\pi + \frac{\pi}{2})^2} + \sqrt[3]{2k\pi(2k\pi + \frac{\pi}{2})} + \sqrt[3]{(2k\pi)^2}}$$

poate fi făcută oricît de mică pentru k suficient de mare.

Dar

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{2k\pi + 2}{2k\pi + 1} \cdot \sin^2 2k\pi - \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2}{2k\pi + \frac{\pi}{2} + 1} \cdot \sin^2(2k\pi + \frac{\pi}{2}) \right| =$$

$$= 1 + \frac{2}{4k\pi + \pi + 2} > 1$$

deci f nu este uniform continuă.

583. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x^2$.

Soluţie Observăm că funcţia este mărginită şi continuă pe toată axa reală.

Avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sin x^2 = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x^2 = (4k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N} \\ -1, & \text{dacă } x^2 = (4k+3)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{dacă } x^2 = k\pi,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Fie

$$x' = \sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}}, \quad x'' = \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$x' - x'' = \frac{\pi}{\sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}} + \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}}$$

Mai observăm că pentru k suficient de mare punctele x', x'' pot fi luate oricît de aproape vrem. Însă:

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\sin(4k+1)\frac{\pi}{2} - \sin(4k+3)\frac{\pi}{2}\right| = 2$$

Funcția nu este uniform continuă pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, dar este uniform continuă pe orice interval compact din $\mathbb{R}$.

584. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x$

Soluție Observăm că funcția este continuă și nemărginită în intervalul considerat. Vom arăta că este uniform continuă.

Fie $x_1, x_2 \geq 0$. Avem

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{x_1}{1+x_1} + x_1 - \frac{x_2}{1+x_2} - x_2\right| =$$

$$= |x_1 - x_2| \cdot \left|1 + \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)}\right| \leq 2|x_1 - x_2| = 2\delta = \varepsilon$$

dacă $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

585. $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x$

Soluție Răspunsul este negativ. Într-adevăr, să considerăm punctele $x_1 = -\dfrac{n+1}{n+2}$, $x_2 = -\dfrac{n}{n+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem: $|x_1 - x_2| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Punctele x_1 și x_2 sînt oricît de apropiate pentru n suficient de mare, însă

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 1 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 1.$$

Deci funcția nu este uniform continuă.

586. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^3 + 2}{x^3 + 1} \cdot \cos^2 x^3$

R. Nu este uniform continuă pe $[0, +\infty)$.

587. $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

R. Nu.

588. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$

R. Da.

589. $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot \cos \frac{1}{x}$

R. Nu.

590. Să se arate că suma și produsul unui număr finit de funcții uniform continue este o funcție uniform continuă.

591. Să se cerceteze continuitatea uniformă a următoarelor funcții:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin^2 x^2$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \cos^2 x^2$

R. Ambele funcții nu sînt uniform continue.

592. Fie dat $\varepsilon > 0$. Să se determine un $\delta(\varepsilon)$ satisfăcînd condiția de continuitate uniformă pentru următoarele funcții:

a) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x + 3}$

b) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

c) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Scanned with OKEN Scanner

593. Să se calculeze $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^l$

Soluție I

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

(S-a folosit suma progresiei geometrice de rație $q = \frac{1}{2}$)

Soluție II (geometrică)

a) În planul α fie segmentul $|AB|$ cu $d(A, B) = 1$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \lim_{n \to +\infty} [d(AA_1) + d(A_1A_2) + \ldots + d(A_{n-1}A_n)]$$

unde $d(AA_1) = \frac{d(AB)}{2} = \frac{1}{2}$; $d(A_1A_2) = \frac{d(AB)}{4} = \frac{1}{4}$;

$d(A_2A_3) = \frac{d(AB)}{8} = \frac{1}{8}$ etc.

Evident acest proces mergînd la infinit punctul A_n pentru $n \to +\infty$ nu poate depăși pe B. Mai mult, A_n pentru $n \to +\infty$ este B deci:

$$\lim_{n\to+\infty} [d(AA_1) + d(A_1A_2) + \ldots + d(A_{n-1}A_n)] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = d(AB) = 1,$$

b) În planul σ fie pătratul de latură 1, (ABCD) cu $\sigma[ABCD] = [d(AB)]^2 = 1$

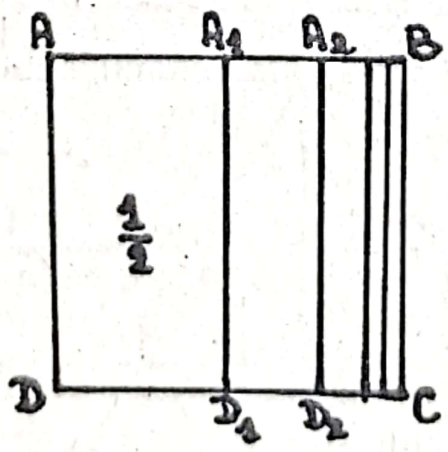


Fig. 15.

Scanned with OKEN Scanner

$$\sigma[ABCD] = 1 = \lim_{n \to +\infty} \{\sigma[AA_1D_1D] + \sigma[A_1A_2D_2D_1] +$$

$$+ \sigma[A_2A_3D_3D_2] + \dots + \sigma[A_{n-1}A_nD_nD_{n-1}]\} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

Suma infinită de arii reprezintă aria pătratului inițial.

c) În spațiul S fie cubul (ABCDA'B'C'D') de latură 1 și volum

$$V(ABCDA'B'C'D') = 1$$

$$V(ABCDA'B'C'D') = \lim_{n \to +\infty} [V(ABCDA_1B_1C_1D_1) +$$

$$+ V(A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2) + \dots + V(A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}A_nB_nC_nD_n)] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

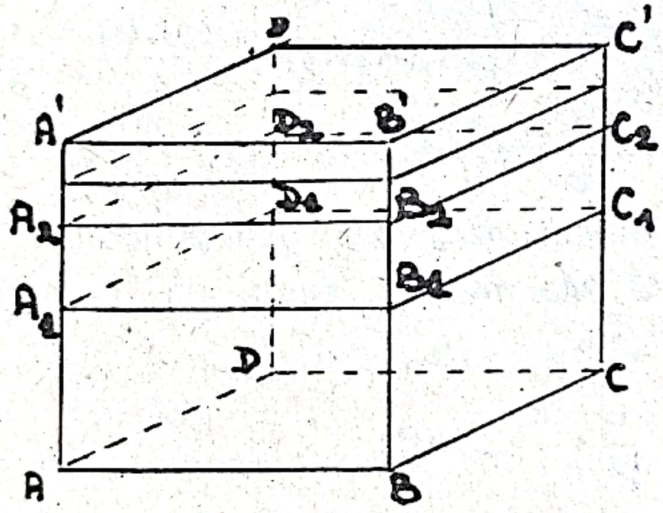


Fig. 16.

Suma infinită de volume reprezintă volumul cubului inițial.

594. Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right]$

Metoda I $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

Metoda II Pornim de la suma

Scanned with OKEN Scanner

$$S = \ln\frac{x+1}{x+2} + \ln\frac{x+2}{x+3} + \ldots + \ln\frac{x+n}{x+n+1}$$

$$S = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x+3}\cdot\ldots\cdot\frac{x+n}{x+n+1}\right) = \ln\frac{x+1}{x+n+1}$$

Avem deci $\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{x+i}{x+i+1} = \ln\frac{x+1}{x+n+1}$.

Dacă derivăm ambii membrii, obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{n}{(x+1)(x+n+1)}$$

Facem pe x = 0 și avem $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$, de unde

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Metoda III (geometrică)

Fie reperul (xoy) și cercurile de rază 1 tangente în origine și dreptei y = 1.

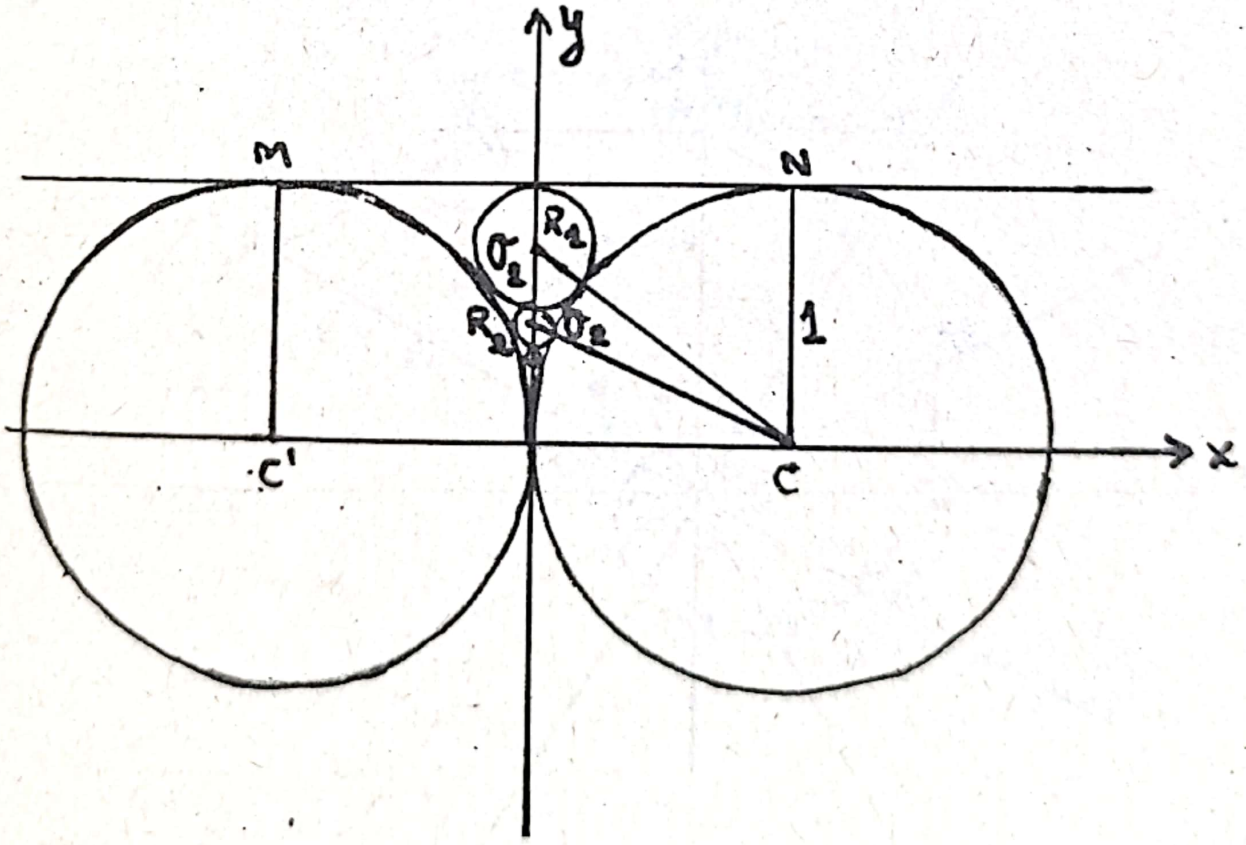


Fig. 17.

Fie cercurile: $C_1(O_1R_1)$ tangent dreptei $y = 1$ și cercurilor mari; $C_2(O_2R_2)$ tangent cercurilor mari și cercului C_1 etc. Evident, suma diametrelor acestor cercuri $C_1, C_2, \ldots, C_n$ pentru $n \to \infty$ nu poate depăși raza cercului mare. Se demonstrează prin inducție că $2R_n = \frac{1}{n(n+1)}$, deoarece în:

$$\Delta ACO_1: (1+R_1)^2 = 1^2 + (1-R_1)^2 \Rightarrow 2R_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$$

$$\Delta ACO_2: (1+R_2)^2 = 1^2 + (1-2R_1-R_2)^2 \Rightarrow 2R_2 = \frac{1}{2\cdot 3} \text{ etc.}$$

De unde $\lim\limits_{n\to\infty} 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} R_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right] = 1$

595. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a\cdot \sin 30^\circ (\cos 30^\circ)^k = a(2+\sqrt{3})$.

Soluție geometrică Fie sistemul de coordonate (xoy) și $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un sistem de puncte din planul (xoy) astfel încît: $d(OA_1) = a$; $m(\widehat{xOA_1}) = m(\widehat{A_1OA_2}) = \ldots = m(\widehat{A_{n-1}OA_n}) = \ldots = 30^\circ$, iar $A_1A_2 \perp OA_2$; $A_2A_3 \perp OA_3$; ...; $A_{n-1}A_n \perp OA_n$; ...

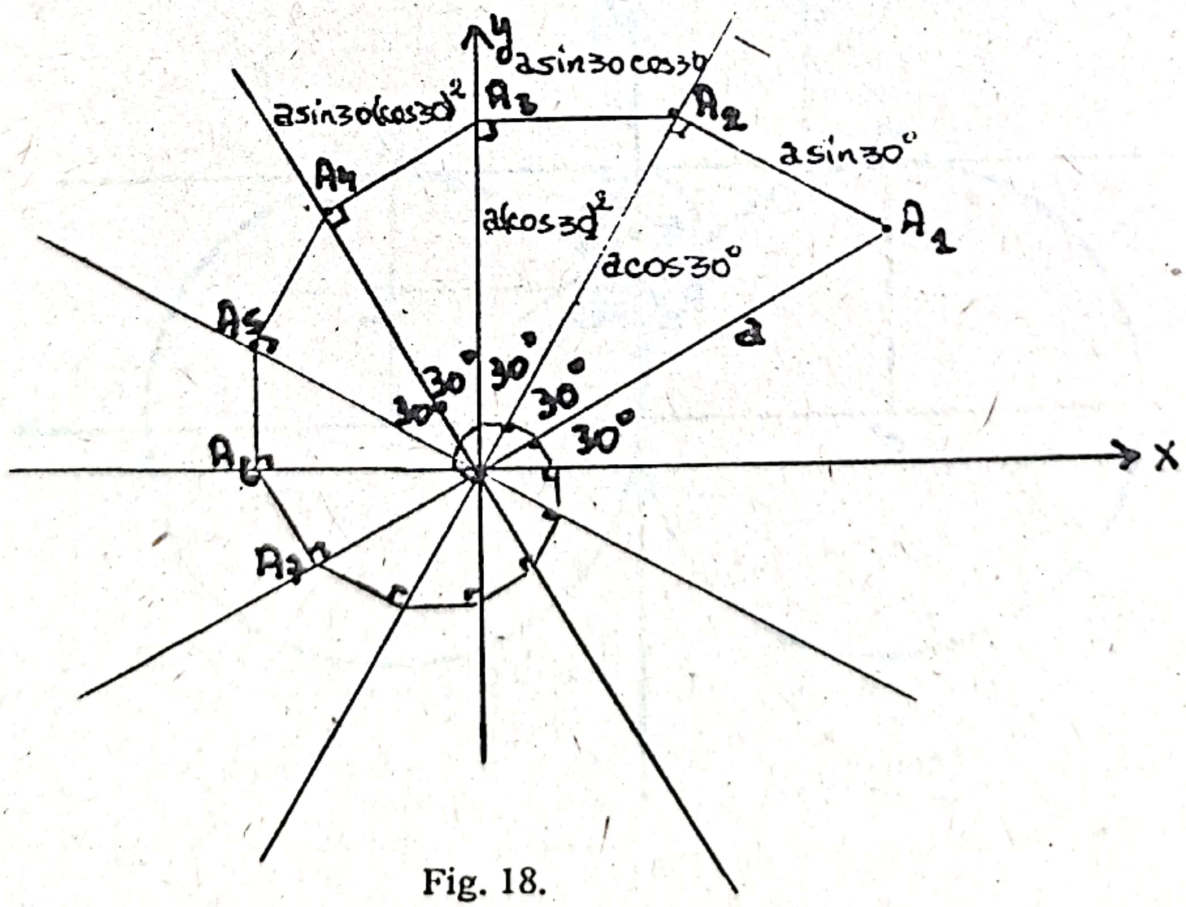


Fig. 18.

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a\cdot\sin 30^\circ(\cos 30^\circ)^k = \lim_{n\to\infty}(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}[a\cdot\sin 30^\circ + a\cdot\sin 30^\circ\cos 30^\circ + \ldots + a\cdot\sin 30^\circ(\cos 30^\circ)^n] =$$

$$= a\cdot\sin 30^\circ\cdot\lim_{n\to\infty}[1+\cos 30^\circ + \ldots + (\cos 30^\circ)^n] =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\ldots+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right] = \frac{a}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{q^n-1}{q-1}$$

unde $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$ este raţia unei progresii geometrice.

Deci limita este:

$$\frac{a}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-1} = \frac{a}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-1} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = a(2+\sqrt{3})$$

596. Arătaţi că $\lim_{n\to\infty}\left[k+k\frac{2ab}{a^2+b^2}+\ldots+k\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^{n-1}\right] = \frac{k}{1-\frac{2ab}{a^2+b^2}}$, unde $a,b>0$, $k>0$.

Soluţie Fie punctele A(a,b) şi B(b,a) cu $a,b>0$, iar (xoy) sistemul de coordonate. În ΔAOB ducem $AA_1\perp OB$, $A_1A_2\perp AO$, $A_1A_2\perp OB$ etc.

Aria ΔAOB este $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1\\ b & a & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \frac{b^2-a^2}{2}$

$$AA_1 = \frac{2S}{OB} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} = k,\quad OA_1 = \sqrt{AO^2-AA_1^2} = \sqrt{a^2+b^2-k^2} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$A_1A_2 = \frac{AA_1\cdot OA_1}{OA} = \frac{k\cdot 2ab}{a^2+b^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

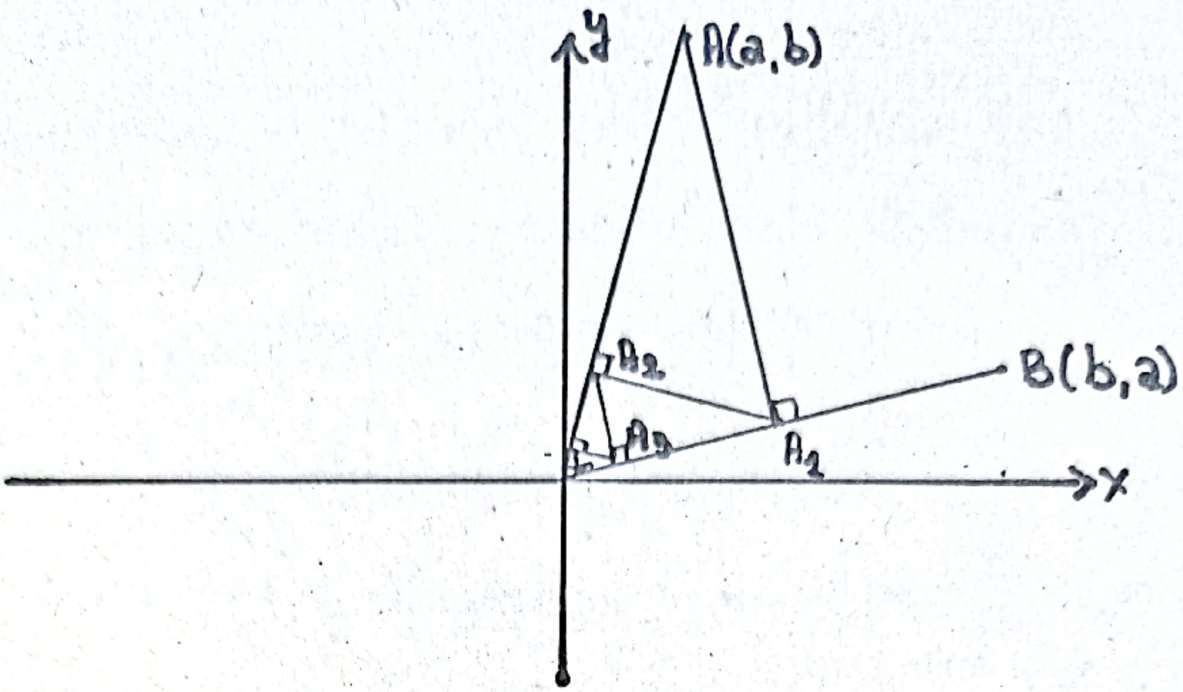


Fig. 19.

Să calculăm A_2A_3. Avem:

$$A_2A_3 = \frac{OA_2 \cdot A_1A_2}{OA_1} = \frac{OA_1 \cdot A_1A_2}{OA} = \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2.$$

Prin inducție se demonstrează că $A_{n-1}A_n = \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^{n-1} \cdot k$.

Avem deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left[k + k\frac{2ab}{a^2+b^2} + \ldots + k\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^{n-1}\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty}(AA_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{k\left[1-\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^n\right]}{1-\frac{2ab}{a^2+b^2}} = \frac{k}{1-\frac{2ab}{a^2+b^2}}$$

597. Fie un cerc de rază R în planul α pe care-l considerăm ca făcînd parte din rîndul 1. În jurul lui, pe rîndul 2, în același plan, construim un șir de cercuri tangente primului cerc și tangente între ele, avînd aceeași rază R. Procedeul de construcție se repetă pentru rîndurile 3, 4, ..., n.
a) Să se afle numărul S_n a tuturor cercurilor pînă la rîndul n inclusiv și $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Scanned with OKEN Scanner

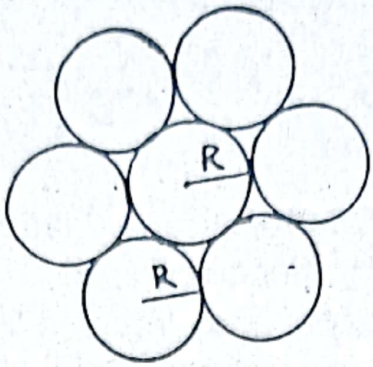


Fig. 20.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n \cdot \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}$

R.

a) $S_n = 3n^2 - 3n + 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

b) 12.

598. Fie un pătrat de latură a notat $A_1B_1C_1D_1$ şi cercul C_1 înscris în pătrat. Dacă prin punctele de tangenţă ale cercului cu pătratul înscriem un nou pătrat, iar în el un cerc ş.a.m.d., atunci dacă notăm aria pătratului de ordin k cu $\sigma_k = \sigma[A_kB_kC_kD_k]$ iar aria cercului de ordin k cu $\sigma'_k = \sigma[b_k]$ avem:

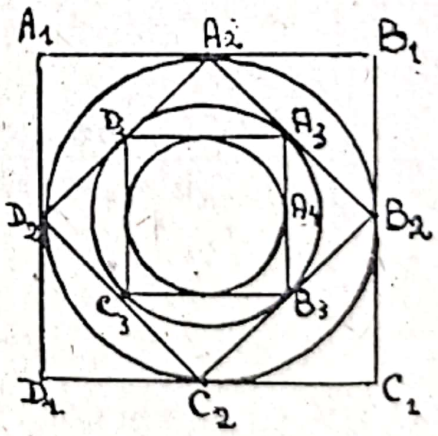


Fig. 21.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2a^2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma'_k = \dfrac{\pi a^2}{2}$

Scanned with OKEN Scanner

R.

a) $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k = 2a^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k = 2a^2$

b) $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k' = \pi a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k' = \frac{\pi a^2}{2}$.

599. Ornamentul unui perete al unei clădiri are forma unor trepte ce scad din măsură cu 1/3 la fiecare etapă.

Știind că prima treaptă are lungimea 1, la ce înălțime maximă pot ajunge treptele?

R. Avem suma unei progresii geometrice cu rația 2/3, anume $h_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$; de unde $h_{max} = \lim_{n\to\infty} h_n = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V. DERIVATE. DERIVABILITATE

V.1. DEFINIȚIA DERIVATEI. DERIVATE LATERALE. DERIVABILITATE

600. Calculați cu ajutorul definiției, derivatele următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^n, n \in N^*$

d) $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

Soluție

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}, x \neq x_0$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} a = a, \forall x_0 \in \mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{ax^n - ax_0^n}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} a(x^{(n-1)} + x_0 x^{(n-2)} + \ldots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1}) = n a x_0^{n-1}$

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{ad - bc}{(cx + d)(cx_0 + d)} = \frac{ad - bc}{(cx_0 + d)^2},$

$\forall x_0 \neq -\frac{d}{c}$

601. a) $f: (-\frac{1}{5}, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{5x + 1}$ în punctul $x_0 = 3$

b) $f: (-\infty, -5) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 5x)$ în punctul $x_0 = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie

a) $$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{5x-15}{(x-3)\cdot\sqrt{5x+1}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{5}{\sqrt{5x+1}+4}=\frac{5}{8}$$

b) $$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+5x)-\ln 6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\frac{x^2+5x}{6}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\ln\left(\frac{x^2+5x}{6}\right)^{\frac{1}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+\left(\frac{x^2+5x}{6}-1\right)\right]^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\ln\left\{\left[1+\frac{x^2+5x-6}{6}\right]^{\frac{6}{x^2+5x-6}}\right\}^{\frac{x^2+5x-6}{6(x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{6(x-1)}=\frac{7}{6}$$

602. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-6}{2x^2+x-3}$ în punctul $x_0=-1$.

Soluţie Avem

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{x^2-4x-6}{2x^2+x-3}-\frac{1}{2}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-9}{2(2x^2+x-3)}=\frac{9}{4}$$

603. Să se cerceteze derivabilitatea funcţiei $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ pornind de la definiţie.

Soluţie Fie $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x+\frac{1}{x}-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)}{x-x_0}=1-\frac{1}{x_0^2}$$

Deci $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

604. Funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$?

Soluție

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-(x+h)-(x^3-x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-1) = 3x^2-1$$

deci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

605. Arătați că funcțiile următoare nu au derivate finite în punctele indicate:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ în $x_0 = 0$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$ în $x_0 = 1$

c) $f(x) = |\cos x|$ în $x_0 = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k = 0, \pm 1; \pm 2; \ldots$

606. Sînt derivabile următoarele funcții în punctele indicate?:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$, în $x_0 = 1$

b) $f(x) = x^3 + 1$, în $x_0 = -1$

c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1$, în $x_0 = 3$

d) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, în $x_0 = -2$

R. Toate funcțiile sînt derivabile.

607. Să se scrie ecuația tangentei la graficele funcțiilor $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ indicate în punctele x_0 respective.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$, $x_0 = 2$

Soluție

a) Folosim formula $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

$$f'(x_0) = f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

$f(x_0) = f(2) = 2^2 = 4$; avem deci $y - 4 = 4(x-2)$..

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x-0}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}x(x+1) = 2$

deci $f'(1) = 2$ iar $f(1) = 0$; ecuația tangentei este $y = 2(x-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

c)

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$f(2) = 3$; ecuaţia tangentei devine $y - 3 = \frac{2}{3}(x-2)$.

608. Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ în $x_0 = 0$.

Soluţie Aceasta depinde de existenţa limitei raportului $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ în punctul $x_0 = 0$.

Avem $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = -1$ şi $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = 1$, deci limita raportului $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nu există în punctul $x_0 = 0$ şi ca atare funcţia modul nu este derivabilă în origine, deşi este continuă în origine.

609. Pornind de la definiţie să se calculeze derivatele următoarelor funcţii $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în punctele indicate:

a) $f(x) = 5x^2 + 2$, $x_0 = 3$

b) $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+1}$, $x_0 = 2$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+1}$; $x_0 = 0$

d) $f(x) = \sin 5x$, $x_0 = 0$

R. a) 30; b) $-\frac{11}{25}$; c) $\frac{2}{3}$; d) 5.

610. f, g, h: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = \sin 3x$; $h(x) = e^{2x}$.

R. $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$; $(e^{2x})' = 2e^{2x}$.

611. a) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

Scanned with OKEN Scanner

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 2} & \text{pentru } 0 \le x \le 2 \\ \frac{9}{8}x + \frac{7}{4} & \text{pentru } x < 2 \text{ în } x_0 = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = x^3 + 4x$

R. a) $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$; b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; c) $f'(2) = \frac{9}{8}$;

d) $f'(x) = 3x^2 + 4$.

612. Să se scrie ecuațiile tangentelor la curbele de ecuații:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ în punctul $(-2,3)$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

R. a) $8x + y + 13 = 0$; b) $x - 4y + 4 = 0$.

613. Să se scrie ecuațiile tangentelor la graficele funcțiilor de mai jos în punctele care au abscisele specificate în dreptul fiecăreia:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$

b) $f(x) = \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$

c) $f(x) = x + \ln x$, $x_0 = e$

R. a) $x - 4y + 5 = 0$; b) $y + \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; c) $y = \frac{e+1}{e}x$.

Să se precizeze dacă următoarele funcții sînt derivabile în punctele specificate:

614. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \cdot \sin x$, $x_0 = 0$.

Soluție Calculăm derivatele laterale ale funcției f în $x_0 = 0$. Avem:

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{|x| \cdot \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} (\sin x) = 0$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{|x| \cdot \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $f'(0) = 0$ și $f'_s(0) = f'_d(0)$, funcția $f(x)$ este derivabilă în $x_o = 0$.

615. $f(x) = \begin{cases} x^3, & -1 \le x \le 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \le 2, \end{cases} \quad x_o = 1$

Soluție Funcția este definită pe intervalul $[-1,2]$. Găsim imediat că $l_s = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = l_d = 1$ adică funcția este continuă în punctul $x_o = 1$. Pentru a ști dacă funcția f este derivabilă în $x_o = 1$, calculăm derivatele laterale $f'_s(x_o)$ și $f'_d(x_o)$.

Avem:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x^2 + x + 1) = 3$$

Funcția nu este derivabilă în $x_o = 1$, deoarece după cum urmează:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 2 = 2$$

616. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, x = 0, & x_o = 0 \end{cases}$

Soluție Cum $l_s = l_d$ se găsește imediat că funcția este continuă în punctul $x_o = 0$. Pentru a ști dacă este derivabilă în 0 calculăm

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \sin \frac{1}{x}.$$

Cum această limită nu există în $x_o = 0$, funcția nu este derivabilă în $x_o = 0$.

617. $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2x) & \text{pentru } -\dfrac{1}{2} < x \le 0 \\ 2x & \text{pentru } x > 0, \end{cases} \quad x_o = 0$

Soluție Funcția este definită pe intervalul $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Se stabilește ușor că funcția este continuă în punctul $x_o = 0$. Pentru derivabilitate calculăm derivatele laterale în $x_o = 0$. Avem :

Scanned with OKEN Scanner

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 2x) - \ln 1}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \ln(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} = 2\ln\left(\lim_{x\to 0}(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}}\right) = 2\ln e = 2; \quad f'_2(0) = 2$$

Cum $f'(0) = 2$ și derivatele laterale egale, funcția f este derivabilă în $x_0 = 0$.

618. Fie funcția $f(x) = \frac{m}{x^2 - 1}$. Să se determine m astfel încît tangenta graficului funcției f în punctul (2,f(2)) să formeze cu partea pozitivă a axei Ox un unghi de 60°.

Soluție

$$\operatorname{tg} 60° = f'_s(2) = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{m}{x^2 - 1} - \frac{m}{3}}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{-m(x + 2)}{3(x^2 - 1)} = \lim_{x\to 2} \frac{-m(x + 2)}{x^2 - 1} =$$

$-\frac{4m}{9}$. De unde $\sqrt{3} = \frac{-4m}{9} \to m = -\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

619. Stabiliți dacă funcția

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ \ln(x^2 - 2x + 2), & x>1 \end{cases}$$

în $x_0 = 1$ este derivabilă.

Soluție

Pentru a calcula $f_s'(1)$ notăm $2^{\frac{1}{x-1}} = y$ și obținem $f_s'(1) = 0$.

$$f'_d(1) = \lim_{x\searrow 1} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x - 1} = \lim_{x\searrow 1} \ln\left[(1 + (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{x^2-2x+1}}\right]^{\frac{x^2-2x+1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\searrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = 0$$

Deci $f'(1) = 0$ și funcția f este derivabilă.

Scanned with OKEN Scanner

620. Precizați derivatele laterale ale funcției

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+3x), & -\frac{1}{3} < x \le 0 \\ 3x, & x > 0 \end{cases} \text{ în } x_0 = 0$$

Soluție

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}} = 3$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{3x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} 3 = 3$$

Deci $f'_s(0) = f'_d(0)$.

621. Fie funcțiile $y = f_1(x) = 2x^2 - 2$ și $y = f_2(x) = 3x^2 - x - 2$ definite pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$. Să se afle unghiurile dintre tangentele la grafic în punctele de intersecție.

Soluție Pentru a găsi coordonatele punctelor de intersecție rezolvăm sistemul $\begin{cases} y = 2x^2 - 2 \\ y = 3x^2 - x - 2 \end{cases}$ și obținem A(0,-2) și B(1,0).

Trebuie deci să calculăm $f'_1(0)$; $f'_2(0)$; $f'_1(1)$; $f'_2(1)$.

$$f_1(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-2+2}{x} = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

$$f'_2(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2-x-2+2}{x} = \lim_{x\to 0} (3x-1) = -1$$

$$f'_1(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2(x+1) = 4$$

Scanned with OKEN Scanner

$$f_2'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f_2(x)-f_2(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2-0}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+2)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}(3x+2) = 5$$

Avem $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)f_2'(x_0)}$ de unde

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{-1-0}{1+(-1)\cdot 0} = -1 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{5-4}{1+5\cdot 4} = \frac{1}{21} \Rightarrow \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{21}$$

622. Calculaţi derivatele laterale pentru funcţia $f(x) = |x^2 - x|$ în $x_0 = 0$.

Soluţie

$$f_s'(0) = \lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\nearrow 0}(x-1) = -1$$

$$f_d'(0) = \lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0}\frac{x-x^2}{x} = \lim_{x\searrow 0}(1-x) = 1$$

În concluzie, $f_s'(0) \neq f_d'(0)$.

623. Pornind de la definiţie, să se calculeze derivatele laterale ale funcţiilor următoare în punctele indicate.

a) $f(x) = \dfrac{x^5}{5}$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 2$

624. Fie funcţia $f(x) = x^2 - px + 1$. Determinaţi p astfel încît tangenta graficului în punctul de abscisă $x_0 = 2$ să formeze cu axa pozitivă Ox un unghi de 60°.

R. $p = 4 - \sqrt{3}$

Scanned with OKEN Scanner

625. Cercetaţi dacă funcţia $f(x) = x^2$ este derivabilă în punctul $x_0 = \frac{1}{2}$.

R. f este derivabilă în $x_0 = \frac{1}{2}$.

626. Să se arate că funcţia f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x & ,x\in Q \\ x & ,x\in \mathbb{R}-Q \end{cases}$ este derivabilă în $x_0 = 0$.

627. Să se calculeze unghiurile sub care se taie graficele funcţiilor de mai jos:

a) $f(x) = 2x + 3$ şi $g(x) = x^2 - x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ şi $g(x) = x^2 - 3x$

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ şi $g(x) = x^2 - 2x + 1$

R. a) $\varphi_1 = 45°$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; b) $\varphi = 90°$; c) $\varphi_1 = \operatorname{arctg} 4$, $\varphi_2 = 0$.

628. Să se calculeze derivatele laterale ale funcţiilor f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ următoare în punctele x_0 indicate:

a) $f(x) = x^2 + x\,|x|$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x & ,\text{dacă } x \geq 0 \\ 2x^2 & ,\text{dacă } x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = x + |x - 2|$, $x_0 = 2$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dacă } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

V.2. APLICAŢII CU DERIVATE

Să se calculeze derivatele funcţiilor următoare (specificînd pentru fiecare funcţie f şi f′ domeniul de definiţie)

629. $f(x) = \frac{2}{7} - \frac{1}{2}x + 3x^2 - 0{,}3x^6$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = -\frac{1}{2} + 6x - 1{,}8x^5$ $\quad D_{f'} = \mathbb{R}$.

630. $f(x) = (-x^3 + 2x - 1)(x^2 + 3x)$

Soluție $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (-x^3 + 2x - 1)'(x^2 + 3x) + (-x^3 + 2x - 1)(x^2 + 3x)' =$
$= (-3x^2 + 2)(x^2 + 3x) + (-x^3 + 2x - 1)(2x + 3) = -5x^4 - 12x^3 +$
$+ 6x^2 + 10x - 3$; $D_{f'} = \mathbb{R}$.

631. $f(x) = (4x^3 + 2x^2 - x + 1)^3$

Soluție $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3(4x^3 + 2x^2 - x + 1)^2(4x^3 + 2x^2 - x + 1)' = 3(4x^3 + 2x^2 -$
$x + 1)^2(12x^2 + 4x - 1)' = 3(4x^3 + 2x^2 - x + 1)^2(12x^2 + 4x - 1)$.
$D_{f'} = \mathbb{R}$

632. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a, c \neq 0$.

Soluție $d_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

$$f'(x) = \frac{(ax+b)'(cx+d) - (ax+b)(cx+d)}{(cx+d)^2} = \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} =$$

$$= \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} \; ; \quad D_f' = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

633. $f(x) = \sqrt{2x - 1 + x^2}$

Soluție $D_f = (-\infty, -1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2}, +\infty)$

$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{2x-1+x^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$; $D_{f'} = (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, +\infty)$.

634. Calculați $f'(x)$ dacă $f(x) = \sqrt[5]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot \sqrt{x}}}$.

Soluție $D_f = \mathbb{R}_+$

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot \sqrt{x}}} = \sqrt[5]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{9}{2}}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{7}{2}}} = x^{\frac{7}{10}}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$f'(x) = \frac{7}{10}x^{-\frac{3}{10}} = \frac{7}{10 \cdot \sqrt[10]{x^3}}; \quad D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$$

635. Determinaţi derivata funcţiei $f(x) = \cos^4 x \cdot \sin^3 x$.

Soluţie $d_F = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (\cos^4 x)' \cdot \sin^3 x + \cos^4 x (\sin^3 x)' = 4\cos^3 x(-\sin x) \cdot \sin^3 x +$$

$$\cos^4 x \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x = -4\sin^4 x \cdot \cos^3 x + 3\sin^2 x \cos^5 x$$

$$D_{f'} = \mathbb{R}$$

636. Să se calculeze $f''(x)$, dacă $f(x) = g(e^{2x})$, g fiind o funcţie definită pe $\mathbb{R}$, care admite derivată de ordinul al doilea.

Soluţie Avem $f'(x) = g'(e^{2x}) \cdot (e^{2x})' = 2e^{2x} \cdot g'(e^{2x})$.

$$f''(x) = 2[e^{2x} \cdot g'(e^{2x})]' = 2\{(e^{2x})' \cdot g(e^{2x}) + e^{2x} \cdot [g'(e^{2x})]\}$$

Însă $[g'(e^{2x})]' = g''(e^{2x}) \cdot (e^{2x})' = 2e^{2x} \cdot g''(e^{2x})$, deci

$$f''(x) = 4[e^{2x} g'(e^{2x}) + e^{4x} \cdot g''(e^{2x})].$$

637. Să se determine coeficienţii α şi β, astfel încît funcţia

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & 0 < x \le e, \\ \alpha x + \beta, & x > e, \end{cases}$ să fie derivabilă pentru orice $x > 0$.

Soluţie Din condiţia de continuitate a funcţiei în punctul $x = e$ obţinem $1 = \alpha e + \beta$. Condiţia de derivabilitate a funcţiei în punctul $x = e$ este $f_s'(e) = f_d'(e)$. Dar

$$f_s'(e) = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \to e} \frac{\ln^3 x - \ln^3 e}{x - e} =$$

$$\lim_{x \to e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e}(\ln^2 x + \ln x \cdot \ln e + \ln^2 e) = \frac{3}{e};$$

$$f_d'(e) = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{\alpha(x - e)}{x - e} = \alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare $\alpha = \frac{3}{e}$, $\beta = 1 - 3 = -2$. Funcţia dată este derivabilă pentru $\forall\, x > 0$ şi derivata ei este $f(x) = \begin{cases} \frac{3\ln^2 x}{x}, & 0<x<e \\ \frac{3}{e}, & x \geq e \end{cases}$

638. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x) = (x^2 - 1)^{x^2}$

Soluţie

Ţinînd cont de regulile de derivare avem:

$$f'(x) = 2x^3(x^2 - 1)^{x^2 - 1} + 2x(x^2 - 1)^{x^2 \cdot \ln(x^2 - 1)}$$

Se observă că $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

639. Să se calculeze primele două derivate ale funcţiei

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Soluţie Considerăm funcţia $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dată de legea $g(x) = x + \sqrt{x}$. Atunci avem $f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{g(x)}}$. De unde:

$$f'(x) = \frac{g'(x)\cdot\sqrt{g(x)} - \frac{g'(x)\cdot g(x)}{2\sqrt{g(x)}}}{g(x)} = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$f''(x) = \left[\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\right]' = \frac{1}{2}\cdot\frac{g''(x)\cdot\sqrt{g(x)} - \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{2g(x)\cdot g''(x) - [g'(x)]^2}{4g(x)\cdot\sqrt{g(x)}}$$

Dar cum $g(x) = x + \sqrt{x}$ rezultă $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $g''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

Înlocuind, obţinem $f'(x) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x + \sqrt{x}}}$ şi.

Scanned with OKEN Scanner

$$f''(x) = -\frac{4x\sqrt{x} + 6x + 3\sqrt{x}}{16x\sqrt{x}(x+\sqrt{x})\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

640. Calculaţi derivata funcţiei $f(x) = x^{\cos x}$.

Soluţie I: Folosim formula $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$

$$f'(x) = \cos x \cdot x^{\cos x - 1} + x^{\cos x} \cdot \ln x \cdot (-\sin x) = x^{\cos x} \cdot \left(\frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \sin x \right)$$

Soluţie II: Logaritmăm funcţia şi avem: $\ln f(x) = \cos x \cdot \ln x$, de unde $f(x) = e^{\cos x \cdot \ln x}$ .. Acum derivăm şi obţinem

$$f'(x) = (\cos x \ln x)' \cdot e^{\cos x \cdot \ln x} = \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) e^{\cos x \ln x} =$$

$$= x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right)$$

641. Să se arate că curbele de ecuaţii $f(x) = x\sin x + \cos x + x$ şi $g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ sînt tangente în punctul $P(0,1)$.

Soluţie Tangentele duse în $P(0,1)$ la cele două curbe trebuie să coincidă. Deoarece $f(0)$ şi $g(0) = 1$, rezultă că P este comun celor două curbe.

$f'(x) = x\cos x + \sin x - \sin x + 1$; $f'(0) = 1$

$g'(x) = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2+1)}$; $g'(0) = 1$. Tangentele avînd aceeaşi pantă, curbele sînt tangente între ele.

642. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

Soluţie Avem $f(x) = -1 + 2(1-x)^{-1}$. De unde $f^I(x) = 2(1-x)^{-2}$; $f^{II}(x) = 2 \cdot 2(1-x)^{-3}$, $f^{III}(x) = 2 \cdot 2 \cdot 3(1-x)^{-4}$; $f^{IV}(x) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(1-x)^{-5}$, ... Prin inducţie se demonstrează că

$$f^{(n)}(x) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n(1-x)^{-(n+1)} = 2 \cdot \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

643. Să se arate că dacă $xy - \ln y = 1$, atunci $y^2 + (xy - 1)y' = 0$.

Soluţie Derivăm în raport cu x: $xy' + y - \frac{y'}{y} = 0$ sau

Scanned with OKEN Scanner

$xyy' + y^2 - y' = 0$, $y^2 + (xy - 1)y' = 0$.

644. Să se arate că funcţia

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 3x - \arccos\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}} - \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

este o constantă. Să se determine constanta.

Soluţie Dacă $f'(x) = 0$, atunci $f(x)$ este constantă, dacă $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$.

Avem:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+9x^2} + \sqrt{1+9x^2}\cdot\frac{3\sqrt{1+9x^2} - \dfrac{54x^2}{2\sqrt{1+9x^2}}}{1+9x^2} + \sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+9x^2} + \frac{3}{1+9x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$f(x) = c = f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 0 - \arccos 0 - \arccos 0 = 0 + 0 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

645. Fie funcţia $y = \dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x-b}$. Arătaţi că expresia $E = \dfrac{2y'^2 - yy''}{y^3}$ este independentă de x.

Soluţie $y' = -\dfrac{1}{(x-a)^2} + \dfrac{1}{(x-b)^2}$

$y'' = \dfrac{2(x-a)}{(x-a)^4} - \dfrac{2(x-b)}{(x-b)^4} = \dfrac{2}{(x-a)^3} - \dfrac{2}{(x-b)^3}$. Înlocuind în expresia E şi făcînd calculele se găseşte $E = \dfrac{2}{a-b}$.

646. Fie funcţia $y = e^x \sin x + e^{-x}\cos x$. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{y'' - 2y}{2y'}\right)^{\frac{1}{x}}$

Soluţie $y' = (e^x - e^{-x})(\sin x + \cos x)$; $y'' = 2(e^x\cos x + e^{-x}\sin x)$. Înlocuind în expresie derivatele găsite obţinem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{y'' - 2y}{2y} = \frac{1 - tgx}{1 + tgx} = \frac{tg\frac{\pi}{4} - tgx}{1 + tg\frac{\pi}{4}tgx} = tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left[tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]^{\frac{1}{x}} \to 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{y'' - 2y}{2y'}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}}{tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -2$$

adică $\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{y'' - 2y}{2y'}\right)^{\frac{1}{x}} = -2$ sau

$$\ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{y'' - 2y}{2y'}\right)^{\frac{1}{x}} = -2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{y'' - 2y}{2y'}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-2}.$$

(S-a folosit regula lui l'Hôpital)

647. Arătaţi că funcţia $y = e^{-x}\cos x$ verifică relaţia $y^{(IV)} + 4y = 0$.

Soluţie

$y' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

$y'' = 2e^{-x}\sin x$

$y''' = 2e^{-x}(\cos x - \sin x)$

$y^{(IV)} = -4e^{-x}\cos x$

Relaţia dată devine: $-4e^{-x}\cos x + 4e^{-x}\cos x = 0$.

648. Să se calculeze derivatele funcţiilor următoare pe domeniul maxim de definiţie.

a) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}$; b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}$; c) $f(x) = \ln(\ln x)$;

d) $f(x) = arctg(\ln x)$; e) $f(x) = \log_a\sqrt{\frac{1 - \cos px}{1 + \cos px}}$; f) $f(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) $\frac{(x-1)^2(5x+1)}{2x\sqrt{x}}$; b) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{[(1+x^3)^4(1+x^3)^2]^2}}$; c) $\frac{1}{x\ln x}$;

d) $\frac{1}{x+x(\ln x)^2}$; e) $\frac{p}{\sin px\ln a}$; f) $\cos^3 x$.

649. Să se arate că funcţiile şi derivatele lor verifică egalităţile scrise în dreptul fiecăreia.

a) $f(x)=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$, $f''(x)+2f(x)\cdot f'(x)=0$

b) $f(x)=\frac{1}{3}\arccos\frac{4+5\cos x}{5+4\cos x}$, $g(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, $3f'(x)-2g'(x)=0$

c) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}$, $f(x)+f''(x)=3f^5(x)$

650. Fiind date funcţiile $y=e^{-2x}(\cos x+\sin x)$, $z=a\cdot e^x\sin(2x+b)$ se cere să se arate că $y''+4y'+5y=0$, $z''-2z'+5z=0$.

651. Să se calculeze derivatele de ordinul n ale funcţiilor:

a) $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; b) $g(x)=\frac{1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

R. a) $f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!(x+1)^{-(n+1)}$;
b) $g^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!(x-1)^{-(n+1)}$.

652. Să se arate că derivata de ordinul n a funcţiei $f(x)=x^{n-1}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ este $(-1)^n\cdot\frac{f(x)}{x^{2n}}$.

R. Se va folosi metoda inducţiei.

653. Calculaţi derivatele funcţiilor următoare:

a) $y=\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$;

b) $z=\sqrt[3]{y+\sqrt{y}}$;

c) $y=\left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $y = \sin^2 t^3$;

e) $y = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$;

f) $y = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$;

g) $y = x \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$;

h) $y = \operatorname{arctg} \ln \frac{1}{x}$;

i) $y = \operatorname{sh}^3 2x$;

j) $y = \operatorname{arg\,sh} \frac{x^2}{a^2}$;

k) $y = \ln(\arcsin 5x)$;

l) $y = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$;

m) $y = x^n \cdot a^{-x^2}$;

n) $y = \operatorname{arctg} \frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}$;

o) $y = x^2 \cdot 10^{2x}$

R.

a) $\frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$;

b) $\frac{1 + 2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{(y + \sqrt{y})^2}}$;

c) $\frac{2abmnx^{n-1}(a + bx^n)^{m-1}}{(a - bx^n)^{m+1}}$;

d) $3t^2 \sin 2t^3$;

e) $-\frac{1}{2} y \operatorname{tg} x (1 + \sqrt{\cos x} \cdot \ln a)$;

f) $\frac{3 \operatorname{ctg}\frac{1}{x} \ln 3}{\left(x \sin \frac{1}{x}\right)^2}$;

g) $\sqrt{2} \sin \ln x$;

Scanned with OKEN Scanner

h) $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$;

i) $6\operatorname{sh}^2 2x \cdot \operatorname{ch} 2x$;

j) $\frac{2x}{\sqrt{a^4+x^4}}$;

k) $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}\cdot \arcsin 5x}$;

l) $\frac{2}{\cos x \sqrt{\sin x}}$;

m) $x^{n-1}a^{-x^2}(m-2x^2\ln a)$;

n) $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$;

o) $2x\cdot 10^{2x}(1+x\ln 10)$.

654. Să se scrie ecuaţia tangentei la curba de ecuaţie $x^2\sqrt{y}+\sin(2y-x)-4=0$ în punctul $M(2,1)$.

R. $3x+4y-10=0$

655. Să se arate că graficele funcţiilor $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $g(x)=\frac{\pi+\ln x}{4}$ sînt tangente şi să se scrie ecuaţia tangentei comune.

R. Pentru $f'(x)=g'(x)$ obţinem $x=1$. Ecuaţia tangentei comune în punctul $M\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ este $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}(x-1)$.

656. Se dau funcţiile $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\sin 3x$ şi $f_3(x)=\sin^3 x$. Să se arate că $f_1^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$; $f_2^{(n)}(x)=3^n\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$ şi

$f_3^{(n)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

657. Fiind dată funcţia $y=\frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}$, să se arate că verifică relaţia:

$$(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+y=0$$

Scanned with OKEN Scanner

658. Să se arate că dacă $\arcsin\frac{x}{y} + x = c$, atunci:

$$xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$$

R. Se derivează în raport cu x, ($|y| < |x|$).

659. Se dau funcţiile $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1 - x^2 + x^3}{1 + x^2 - x^3}$; $g(x) = \operatorname{arctg} x^2(x - 1)$. Să se calculeze derivatele $f'(x)$ şi $g'(x)$ şi să se interpreteze rezultatul.

R. Se notează $u = \frac{1 - x^2 + x^3}{1 + x^2 - x^3}$, $v = x^2(x - 1)$

$f'(x) = \frac{u'x}{1 + u^2}$; $g(x) = \frac{v'x}{1 + v^2}$. Funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ avînd aceeaşi derivată, ele diferă printr-o constantă.

660. Să se calculeze derivatele funcţiilor:

a) $f(x) = \ln\sin 3x$

b) $f(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

R. a) $3\operatorname{ctg} 3x$; b) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$; c) $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}}$.

661. Să se calculeze derivatele de ordinele indicate pentru funcţiile următoare:

a) $y = x^{\ln x^{\ln\ln x}}$, $x > 1$, derivata de ordinul I

b) $y = x^2\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$, derivata de ordin 30

c) $y = x^4 e^{ax}$, $x, a \in \mathbb{R}$, derivata de ordin 10

d) $y = \frac{x}{x + a}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} - \{-a\}$ derivata de ordin n.

R.

a) $y' = x^{\ln x^{\ln\ln x}} \cdot \frac{\ln x}{x} \cdot [2\ln\ln x + 1]$

b) Utilizăm formula lui Leibniz şi obţinem:

$$y^{(30)} = -2^{30}x^2\sin 2x + 30 \cdot 2^{30}x\cos 2x + 435 \cdot 2^{29}\sin 2x$$

Scanned with OKEN Scanner

c)

$$y^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k}\, u^{(k)} \cdot v^{(10-k)} \Rightarrow y^{(10)} = a^{10}x^4e^{ax} +$$

$$C_{10}^{1}4x^3a^9e^{ax} + C_{10}^{2}4\cdot 3x^2a^8e^{ax} + C_{10}^{3}4\cdot 3\cdot 2xa^7e^{ax} +$$

$$C_{10}^{4}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a^6e^{ax}$$

d)

$$y = \frac{x}{x+a} = 1 - \frac{a}{x+a},\ x \neq -a \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{a\cdot n!}{(x+a)^{n+1}}$$

(Se demonstrează prin inducție)

662. Calculați derivatele funcțiilor următoare:

a) $f(x) = a^{\frac{x+1}{x-1}}$;

b) $f(x) = e^{\sin^2 x}$;

c) $f(x) = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$;

d) $f(x) = x^{\ln x}$;

e) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

f) $f(x) = \frac{2^x(x\ln 2 - 1)}{\ln^2 2}$;

g) $f(x) = \operatorname{th} x - x$;

h) $f(x) = \operatorname{arcsh}\frac{x^2}{a^2}$;

i) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcth} x$;

j) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\cdot 2\operatorname{arcth} x + \frac{1}{2}x$;

k) $f(x) = \arcsin x \cdot \operatorname{arcsh} x$;

l) $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$;

m) $f(x) = \lg(7x + 1)$;

n) $f(x) = \operatorname{argsh}(3x^4 + 2)$;

o) $f(x) = \operatorname{argcth}(x^2 + 3)$

Scanned with OKEN Scanner

R.

a) $f'(x) = \dfrac{-2a\dfrac{x+1}{x-1} \cdot \ln a}{(x-1)^2}$;

b) $f'(x) = \sin 2x\, e^{\sin^2 x}$;

c) $f'(x) = e^x\left[1 + e^{e^x}\left(1 + e^{e^{e^x}}\right)\right]$;

d) $f'(x) = x^{\ln x - 1} \cdot \ln \sqrt[x]{x^2}$;

e) $f'(x) = (1 - \ln x)x^{\frac{1}{x} - 2}$;

f) $f'(x) = x \cdot 2^x$;

g) $f'(x) = -\text{th}^2 x$;

h) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{a^4 + x^4}}$;

i) $f'(x) = \dfrac{-2x^2}{1 - x^4}$;

j) $f'(x) = x \operatorname{arcth} x$;

k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \operatorname{arcsh} x + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \arcsin x$;

l) $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)\ln 2} \cdot 2x$;

m) $f'(x) = \dfrac{1}{(7x + 1)\ln 10} \cdot 7$;

n) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(3x^4 + 2)^2 + 1}} \cdot 12x^3$;

o) $f'(x) = \dfrac{1}{1 - (x^2 + 3)^2} \cdot 2x$.

V.3. PUNCTE DE EXTREM. TEOREMA LUI FERMAT. MAXIME SAU MINIME

663. Să se arate că pentru funcția $f(x) = x^2 \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ $x_0 = 0$ nu este punct de extrem.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f'(x) = x(2\sin x + x\cos x)$ și are $f(0) = 0$. În punctul $x_0 = 0$, funcția $f(x)$ nu are extreme deoarece $f(x) - f(0) = x^2\sin x > 0$, dacă $0 < x < \pi$, $f(x) - f(0) = x^2\sin x < 0$, dacă $-\pi < x < 0$.

664. Să se găsească valorile extreme ale funcției $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x$.

Soluție Extremele funcției se pot găsi cu ajutorul derivatei întîi. Căutăm însă o altă soluție.

Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ rezultă $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$, deci $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Apoi $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Rezultă $f(x) = 2 - 5\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2 - \frac{5}{4}\sin^2 2x$.

Funcția admite un minim egal cu $2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$, un maxim egal cu 2.

665. Dacă m și M sînt extremele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$ cu $a, b < 0$, atunci $M + m = 2c$ și $M \cdot m = \frac{108b^5}{3125a^3} + c^2$.

Soluție $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 = x^2(5ax^2 + 3b) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{-\frac{3b}{5a}}$. $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$, $f'''(x) = 60ax^2 + 6b$.

Deoarece $f'(0) = f''(0)$ și $f'''(x) \neq 0$ rezultă că $x = 0$ nu este punct de extrem pentru f. Deci punctele de extrem ale lui f sînt x_3 și x_4 cu $x_3 + x_4 = 0$ și $x_3 x_4 = -\frac{3b}{5a}$.

Un calcul simplu conduce la relațiile din enunț.

666. Să se dea un exemplu prin care să se arate că dacă punctul x_0 este unul din capetele intervalului E, punctul x_0 poate fi punct de extrem fără ca derivata să se anuleze în punctul x_0.

Soluție Fie $f: [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Evident funcția f are un punct de minim în $x_0 = 1$ și un punct de maxim în $x_0 = 2$. Derivata $f'(x) = 2x$ nu se anulează în aceste puncte. $f'(1) = 2 \neq 0$; $f'(2) = 4 \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

667. Arătaţi printr-un exemplu că o funcţie poate avea un extrem într-un punct x_0 fără a avea derivată în punctul x_0.

Soluţie Funcţia $f(x) = x^2 + |x|$ are în punctul $x_0 = 0$ un minim şi nu are derivată în punctul $x_0 = 0$.

668. Să se calculeze extremele relative ale funcţiei $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{x^2 - 2x + 2}$ unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie Avem $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 6}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{10}$.

$f(-2-\sqrt{10}) = \dfrac{20 + 7\sqrt{10}}{20 + 6\sqrt{10}}$ reprezintă maximul iar $f(-2+\sqrt{10}) = \dfrac{20 - 7\sqrt{10}}{20 - 6\sqrt{10}}$ reprezintă minimul.

669. Să se afle maximul funcţiei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dată de legea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, apoi să se deducă inegalitatea $e^x \geq x^e$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Soluţie $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$. Deci $x_0 = e$ este punct de maxim pentru $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Adică $\dfrac{\ln e}{e} \geq \dfrac{\ln x}{x}$ sau $\dfrac{1}{e} \geq \dfrac{\ln x}{x}$ sau $x \geq e \ln x \Rightarrow \ln e^x \geq \ln x^e$, adică $e^x \geq x^e$. Egalitatea are loc pentru $x = e$.

670. Să se afle minimul funcţiei $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} - 12 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

Soluţie $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 1) - 12 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{1 + x} =$

$= \dfrac{(x-1)(5x^2 + 10x + 11)}{2\sqrt{x}(1 + x)} = 0 \Rightarrow x_0 = 1$ punct de minim căci $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0, 1)$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x > 1$. Valoarea minimă este $f(1) = 2 - 12\dfrac{\pi}{4} = 2 - 3\pi$.

671. Care este dreptunghiul de perimetru dat, 4a, care are cea mai mare arie ?

Soluţie Fie x, y dimensiunile dreptunghiului. Avem $2x + 2y = 4a$ sau $x + y = 2a$, de unde $y = 2a - x$.

Scanned with OKEN Scanner

Aria dreptunghiului este $S(x) = xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax$. Cum latura dreptunghiului este cuprinsă între 0 și semiperimetrul 2a, rezultă că $x \in [0, 2a]$. Pentru $x = 0$ și $x = 2a$, dreptunghiul are aria nulă. Calculăm derivata $S'(x) = -2x + 2a = 0 \Rightarrow x = a$. Cum $S''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x = a$ este un punct de maxim al funcției $S(x)$. Așadar, aria este maximă cînd $x = a$ și $y = 2a - a = a$, adică atunci cînd laturile dreptunghiului sînt egale și deci este vorba de pătrat.

672. Care este dreptunghiul de arie dată a^2, care are cel mai mic perimetru ?

Soluție Fie x și y dimensiunile dreptunghiului: $xy = a^2$, de unde $y = \frac{a^2}{x}$. Perimetrul P al dreptunghiului este $P = 2x + 2y = 2x + \frac{2a^2}{x}$.

Scriem $P(x) = 2x + \frac{2a^2}{x}$. Cum P(x) este definită pentru $x \in (0, +\infty)$, pentru a găsi minimul acestei funcții, calculăm derivata $P'(x) = 2 - \frac{2a^2}{x^2}$.

Din $P'(x) = 0$ avem $x = a$. $P''(x) = \frac{4a^2}{x^3} > 0$ deoarece $x > 0$, deci $x = a$ este un minim al funcției P. Așadar, perimetrul este minim cînd $x = a$ și $y = a$, adică atunci cînd laturile dreptunghiului sînt egale.

673. Se consideră o emisferă de centru O și rază R. Dintre conurile circulare drepte circumscrise emisferei și avînd centrul bazei în O, să se determine conul de volum minim.

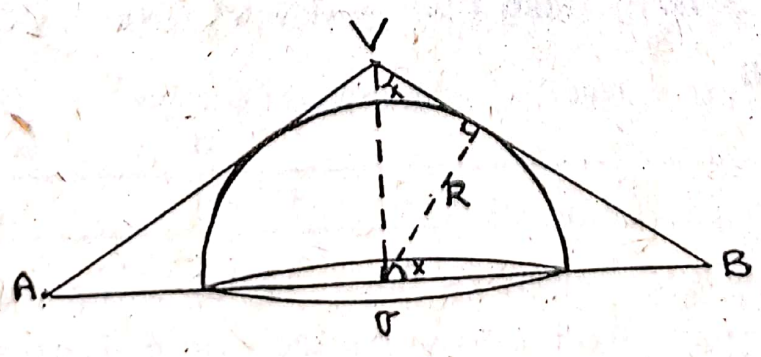


Fig. 22.

Soluție Notăm cu $2x$ măsura unghiului AVB. Atunci $OV = \frac{R}{\sin x}$, $OB = \frac{R}{\cos x}$ și volumul conului va fi:

$$W = \frac{\pi \, OB^2 \, OV}{3} = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Determinăm minimul funcției $W(x) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$W'(x) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \left(-\frac{\cos^3 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}\right) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{2\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

Ecuația $W'(x) = 0$ are soluția dată $2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ deci $\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Se reține soluția $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ adică $x_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$; în acest caz $W''(x_0) > 0$, deci x_0 este un punct de minim.

674. Prin punctul P(1,4) să se ducă o dreaptă astfel ca suma lungimilor segmentelor tăiate de aceasta pe axele de coordonate să fie minimă.

Soluție Fie u și v lungimile tăiate de dreaptă pe axele de coordonate. Ecuația dreptei este $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$. Impunînd condiția ca dreapta să treacă prin P(1,4), obținem $u = \frac{v}{v-4}$. Trebuie să determinăm minimul funcției $u + v$, adică minimul funcției $v + \frac{v}{v-4} = \frac{v^2 - 3v}{v-4} = f(v)$. Avem $f'(v) = 0 \Rightarrow v^2 - 8v + 12 = 0$, adică $v_1 = 2$ și $v_2 = 6$.

v		2		6	
$f'(v)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(v)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Funcția $f(v) = \frac{v^2 - 3v}{v-4}$ este minimă pentru $v = 6$. Din $u = \frac{v}{v-4}$ obținem $u = 3$. Ecuația devine $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

675. Să se determine valoarea minimă a funcției $f(x) = n\,tg^m x + m\,ctg^n x$ știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ iar $m, n \in \mathbb{N}$.

R. Notăm $t = tgx$, $t > 0 \rightarrow f(x) = f_1(t) = nt^m + mt^{-n}$. Din $f'_1(t) = 0 \Rightarrow t = 1$. Cum $f''_1(1) = mn(m + n) > 0 \rightarrow f_1(t)$ este minim pentru $t = 1$; $\min f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = m + n$.

676. O piramidă are ca bază un triunghi echilateral de latură x variabilă și muchie dată k. În ce caz volumul piramidei este maxim?

R. Înălțimea triunghiului echilateral este $h = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2}$ deci aria bazei $s = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{4}$ iar înălțimea piramidei $H = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2} = \frac{\sqrt{3k^2 - x^2}}{\sqrt{3}}$.

$V_{max} = \frac{2k^2\sqrt{3k^2 - 2k^2}}{12} = \frac{k^3}{6}$ deoarece $V'(x)$ se anulează pentru $x = \sqrt{2k}$.

677. Într-o sferă de rază R să se înscrie un cilindru de volum maxim.

R. Se notează înălțimea cilindrului cu 2x și rezultă raza bazei cilindrului $\sqrt{R^2 - x^2}$ iar $V = 2\pi(R^2 - x^2)x \rightarrow V_{max} = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

678. Să se arate că funcția $f(x) = 9\sin x + \sin 3x$ admite pentru $x = \frac{\pi}{2}$ un maxim, iar pentru funcția $g(x) = 3\sin x - \sin 3x$, $x = \pi$ este punct de extrem.

R. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ iar $f^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -72 < 0$. Prima derivată diferită de zero fiind de ordin par și negativă, funcția $f(x)$ admite maxim pentru $x = \frac{\pi}{2}$. $g'(\pi) = g''(\pi) = 0$ iar $g'''(\pi) = -24 < 0$. π nu este punct de extrem.

Scanned with OKEN Scanner

679. Să se înscrie într-un con un cilindru de volum maxim (se va presupune că baza cilindrului și baza conului se află situate în același plan).

R. Raza bazei conului este o dată și jumătate mai mare decît raza cilindrului.

680. Să se înscrie într-o sferă de rază R un con avînd aria laterală maximă.

R. Înălțimea conului este $\frac{4}{3}R$.

681. Descompuneți numărul pozitiv a în două părți astfel încît produsul lor să fie maxim.

R. $P(x) = x(a - x)$, $x \in (0, a)$; pentru $x = \frac{a}{2}$ se obține $P_{max} = \frac{a^2}{4}$

682. Determinați dreptunghiul de arie maximă înscris într-o elipsă de ecuație $4x^2 + 9y^2 = 36$.

R. Notăm a și b laturile dreptunghiului și avem $4a^2 + 9b^2 = 144$.

Rezultă $S(a) = \frac{2}{3}a\sqrt{36 - a^2}$, $a \in [0,6]$; pentru $a = 3\sqrt{2}$ avem $S_{max} = 12$.

683. Printre cilindrii de volum dat, determinați acela care are aria totală minimă.

R. Înălțimea este egală cu diametrul bazei.

V.4. TEOREMA LUI ROLLE. SEPARAREA RĂDĂCINILOR CU AJUTORUL ȘIRULUI LUI ROLLE

684. Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcția $f(x) = e^{|x|}$, $x \in [-1,1]$.

Soluție Funcția $f(x) = e^{|x|}$ este continuă pe [-1, 1] după cum se poate vedea și grafic.

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases} \qquad f'(x) = (e^{|x|})' = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ -e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident $f'_s(0) = -1$; $f'_d(0) = 1$, deci nu se poate aplica teorema lui Rolle pe $[-1, 1]$.

685. Să se arate că funcţia $f(x) = x - x^3$ satisface condiţiile teoremei lui Rolle pe intervalele închise $-1 \leq x \leq 0$ şi $0 \leq x \leq 1$ şi să se determine valorile corespunzătoare ale lui c.

Soluţie Funcţia f este continuă şi derivabilă pe toată axa reală.

$f(-1) = f(0) = 0$; $f(0) = f(1) = 0$.

Deci se poate aplica teorema lui Rolle pe fiecare dintre intervalele date:

$f'(x) = 1 - 3x^2$; $f'(c) = 1 - 3c^2 \Rightarrow 1 - 3c^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_1 \in (-1,0)$ şi $c_2 \in (0,1)$.

686. Fie funcţia $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1,0) \\ px^2 + 4x + 4, & x \in [0,1] \end{cases}$, definită pe intervalul $[-1,1]$ şi $m, n, p \in \mathbb{R}$. Să se determine parametrii m, n, p, astfel încît funcţia dată să satisfacă condiţiile teoremei lui Rolle.

Soluţie Funcţia f este continuă pe intervalul $[-1,1]$, dacă $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) - f(0)$, deci $n = 4$. Deci pentru $n = 4$, funcţia f este continuă pe $[-1,1]$. Funcţia f este derivabilă pe $(-1,1)$ cu condiţia ca $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f'(x)$. Deci pentru $m = 4$, funcţia f este derivabilă pe $(-1,1)$. Condiţia $f(-1) = f(1)$ implică: $1 - m + n = 1$ şi $p + 8 = 1 \Rightarrow p = -7$.

În concluzie, funcţia de forma dată în enunţ, căreia i se poate aplica teorema lui Rolle, se poate scrie $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, & x \in [-1,0) \\ -7x^2 + 4x + 4, & x \in [0,1] \end{cases}$

687. Se dă funcţia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b). Dacă $f(x) \neq 0$ pe (a,b), să se arate că există cel puţin un punct $\theta \in (a,b)$, astfel încît $\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{a - \theta} + \frac{1}{b - \theta}$.

Soluţie Fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)(x - a)(x - b)$, rezultă g derivabilă; $g(a) = g(b) = 0$ şi deci putem aplica teorema lui Rolle pe (a,b).

Scanned with OKEN Scanner

$\exists\ \theta \in (a,b)$, astfel încît $g'(\theta) = 0$, dar $g'(\theta) = f'(\theta)(\theta-a)(\theta-b) + f(\theta)[(\theta-b)+(\theta-a)]$ deci $g'(\theta) = 0 \Rightarrow \dfrac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \dfrac{1}{a-\theta} + \dfrac{1}{b-\theta}$.

688. Să se studieze valabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcții:

a) $f: \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ \sin x, & \dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$;

b) $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$;

c) $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|^3$.

Soluție

a) f este continuă pe $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ și derivabilă pe $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

În $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, studiem derivabilitatea pornind de la definiție:

$$f'_d\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \searrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad f'_s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$f'_s\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \ne f'_d\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ și $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

În interiorul intervalului $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ nu există un punct c astfel ca $f'(c) = 0$; condiția de derivabilitate a funcției în intervalul $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ nu este satisfăcută.

b) f este continuă pe [0,2] și derivabilă în intervalele [0,1) și (1,2] și

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

În punctul $x_0 = 1$, studiem derivabilitatea pornind de la definiție.

$f'_s(1) = \lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{1-x}{x-1} = -1$, $f'_d(1) = \lim\limits_{x\searrow 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$; $f'_s(1) \neq f'_d(1)$.

$f(0) = f(2) = 1$. Nu există nici un punct $c \in (0,2)$ astfel ca $f'(c) = 0$. Condiția de derivabilitate nu este satisfăcută în intervalul $(0,2)$.

c) f este continuă în $[0,2]$, derivabilă în $(0,2)$ și $f'(x) = 3(x-1) \cdot |x-1|$

$f(0) = f(2) = 1$. Condițiile enunțate în teorema lui Rolle sînt satisfăcute. Punctul c este $x = 1$ și $f'(1) = 0$.

689. Fie funcția $f(x) = (ax+b)^m(cx+d)^n$, $m>1$, $n>1$, $x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că $\frac{b}{a} < \frac{mad+nbc}{ac(m+n)} < \frac{d}{c}$ sau $\frac{d}{c} < \frac{mad+nbc}{ac(m+n)} < \frac{b}{a}$.

Soluție $f'(x) = (ax+b)^{m-1}(cx+d)^{n-1} \cdot [(mac+nca)x + (mad+ncb)]$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{a}$, $x_2 = -\frac{d}{c}$ nu aparțin intervalului considerat.

$x_3 = -\frac{mad+nbc}{ac(m+n)}$, $f(x) = 0$ pentru $x_1 = -\frac{b}{a}$, $x_2 = -\frac{d}{c}$.

Avem: $\frac{b}{a} < \frac{mad+nbc}{ac(m+n)} < \frac{d}{c}$ dacă $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ și

$\frac{d}{c} < \frac{mad+nbc}{ac(m+n)} < \frac{b}{a}$ dacă $\frac{d}{c} < \frac{b}{a}$.

690. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9 = 0$.

Soluție Intervalul de studiu este $\mathbb{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ este $3x^2 + 6x = 0$ și are rădăcinile $x_1 = -2$ și $x_2 = 0$.

$\alpha = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + 3x^2 - 9) = -\infty$, $f(-2) = -8+12-9 = -5$,

$f(0) = -9$, $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

Considerăm tabloul:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-5	-9	$+\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Șirul lui Rolle este șirul semnelor cuprinse în ultima rubrică anume: -, -, -, +. Există o singură schimbare de semn, deci ecuația inițială are o singură rădăcină reală situată în intervalul $(0, +\infty)$.

691. Să se discute, folosind șirul lui Rolle, după valorile parametrului real m, rădăcinile reale ale ecuației $f(x) = 6x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x + m + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

Soluție Avem $f'(x) = 24x^3 - 24x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = m - \frac{11}{8}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = m + \frac{21}{8}$; $f(1) = m + 2$. $f(-\infty) > 0$; $f(+\infty) > 0$.

$f(x)$ / m	$f(-\infty)$	$f(-\frac{1}{2}) = m - \frac{11}{8}$	$f(\frac{1}{2}) = m + \frac{21}{8}$	$f(1) = m + 2$	$f(+\infty)$	Discuție
$(-\infty, -\frac{21}{8})$	+	-	-	-	+	2 rădăcini reale simple
$-\frac{21}{8}$	+	-	0	-	+	2 simple, una dublă $= \frac{1}{2}$
$(-\frac{21}{8}, -2)$	+	-	+	-	+	4 simple
-2	+	-	+	0	+	2 simple, una dublă $= 1$
$(-2, \frac{11}{8})$	+	-	+	+	+	2 simple
$\frac{11}{8}$	+	0	+	+	+	una dublă $= -\frac{1}{2}$
$(\frac{11}{8}, +\infty)$	+	+	+	+	+	nici o rădăcină reală

692. Să se discute folosind șirul lui Rolle, după valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$, rădăcinile reale ale ecuației: $f(x) = 3x^2 - x - \ln x + m = 0$, $x > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție $f'(x) = 6x - 1 - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{2}$

f(x) m	$f(0^+)$	$f(\frac{1}{2}) = \ln 2 + m - \frac{1}{4}$	$f(+\infty)$	Discuție
$(-\infty, \frac{1}{4} - \ln 2)$	+	-	+	2 rădăcini reale simple
$\frac{1}{4} - \ln 2$	+	0	+	o rădăcină dublă $= \frac{1}{2}$
$(\frac{1}{4} - \ln 2, +\infty)$	+	+	+	nici o rădăcină reală

693. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 40x + 1 = 0$.

Soluție $f'(x) = 10(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)		0	0	
f(x)	$-\infty$	$f(-1) > 0$	$f(1) < 0$	$+\infty$

Șirul lui Rolle este -, +, -, +. Ecuația dată are trei rădăcini reale situate în intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ și $(1, +\infty)$.

694. Funcția $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ ia în extremitățile intervalului [0,4] valori egale $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$. Putem aplica teorema lui Rolle acestei funcții pe intervalul [0, 4] ?

R. Nu, pentru că f'(2) nu există.

695. Să se precizeze dacă condițiile din teorema lui Rolle sînt verificate pentru funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ pe segmentul $[0, \pi]$.

R. Nu. Punctul $x = \frac{\pi}{2}$ este un punct de discontinuitate pentru funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Scanned with OKEN Scanner

696. Să se arate cu ajutorul teoremei lui Rolle că dacă un polinom P de gradul n are rădăcinile reale distincte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, atunci derivata sa P' are și ea toate rădăcinile reale.

R. Conform teoremei lui Rolle, în fiecare din intervalele (x_1,x_2), (x_2,x_3), ..., (x_{n-1},x_n) este cîte o rădăcină a derivatei $P'(x)$.

697. Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Rolle în cazul următoarelor funcții:

a) $f: [-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-1,0] \\ x + 1, & x \in (0,1] \end{cases}$

b) $f: [-2\sqrt{2},3]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 4}, & x \in [0,3] \\ \frac{x^2}{4} + 2, & x \in [-2\sqrt{2},0] \end{cases}$

c) $f: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$, $f(x) = |\sin^3 x|$.

R. a) Nu este aplicabilă; b) Nu este aplicabilă; c) Este aplicabilă, $c = 0$.

698. Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}$, $x \in [-1,1]$

b) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

R.

a) Este aplicabilă, $c = 0$

b) Este aplicabilă, $c = 0$

699. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuațiilor:

a) $12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

b) $x^3 - 9x^2 + 24x + 7 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

c) $x^2 - x - \ln x + 3 = 0$, $x \in (0, +\infty)$

d) $x \ln x - 7 = 0$, $x \in (0,\infty)$

Scanned with OKEN Scanner

R.

a) 2 rădăcini reale situate în $\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$ și $(1, +\infty)$.

b) O singură rădăcină reală în $(-\infty, 2)$.

c) Ecuația nu are rădăcini reale.

d) O singură rădăcină reală în $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

700. Să se discute, după valorile parametrului real m, rădăcinile reale ale următoarelor ecuații:

a) $9x^4 - 2x^3 + 33x^2 + 36x + m = 0,\ x \in \mathbb{R}$

b) $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + m = 0,\ x \in \mathbb{R}$

c) $x^2 + x + e^{-x} + m = 0,\ x \in \mathbb{R}$

d) $2mx^3 + x^2 + m = 0,\ x \in \mathbb{R}$

V.5. TEOREMA LUI LAGRANGE

701. Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru funcția f, dată prin:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0,1) \\ x^3 + 2, & x \in (1,2] \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$ pe intervalul [0,2].

Soluție Verificăm dacă f este continuă pe [0,2]: $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 3 = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x)$ și $f(1) = 3$. Deci f este continuă pe [0,2]. Verificăm dacă f este derivabilă pe (0,2). $f'_s(1) = 3 = f'_d(1)$, deci f este derivabilă pe (0,2). Atunci există $c \in (0,2)$, astfel încît $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = 5$. Pentru a găsi valoarea lui c, rezolvăm ecuația $f'(c) = 5$. Ecuația nu are soluții în (0,1), deoarece pe acest interval $f'(c) = 3$. Pentru $c \in [1,2)$ avem $3c^2 = 5$, care admite soluția $c = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

702. Să se verifice dacă condițiile teoremei lui Lagrange sînt

Scanned with OKEN Scanner

satisfăcute de funcția f, dată prin $f(x) = x - x^3$ pe intervalul $[-2,1]$ și să se găsească valoarea intermediară corespunzătoare lui c.

Soluție Funcția f, definită prin $f(x) = x - x^3$ este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$. Astfel avem: $f(1) - f(2) = 3f'(c)$; $-2<c<1 \Leftrightarrow f'(c) = -2$ $\Leftrightarrow 1 - 3c^2 = -2 \Leftrightarrow c = \pm 1$. Prin urmare $c = -1$, deoarece $-2<c<1$.

703. Să se studieze posibilitatea aplicării unei consecințe a teoremei lui Lagrange („Dacă derivatele a două funcții definite pe un interval sînt egale, atunci diferența funcțiilor este constantă pe acest interval"), funcțiilor f și g, unde: $f(x) = tgx$, $g(x) = \begin{cases} tgx + 1, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ tgx - 1, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$, sînt definite pe $A = (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Soluție Avem $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, deci $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in A$.

Dar diferența $f(x) - g(x)$ nu este constantă pe A deoarece

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} -1, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

Evident, domeniul de definiție al funcțiilor date nu este un interval, deci funcțiile nu satisfac condițiile consecinței teoremei lui Lagrange. Dar aceste condiții sînt îndeplinite pe fiecare din intervalele $(0, \frac{\pi}{2})$ sau $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

704. Aplicînd corolarul anterior, să se studieze derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ \ln x + x, & x > 1 \end{cases}$ în punctul $x_0 = 1$.

Soluție Pe intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ funcția f este continuă și derivabilă. Din $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$, rezultă că f este continuă în $x_0 = 1$. Pentru $\forall x \neq 1$ avem: $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x<1 \\ \frac{1}{x} + 1, & x>1 \end{cases}$, deci

Scanned with OKEN Scanner

$\lim\limits_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} 2x = 2$ şi $\lim\limits_{x \searrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 2$. Aplicînd corolarul, rezultă că f este derivabilă în $x_0 = 1$ şi $f'(1) = 2$.

705. Să se calculeze valoarea lui c din teorema lui Lagrange pentru funcţia f, unde $f(x) = x \ln x$, $x \in [a,b]$, $a > 0$.

Soluţie Funcţia f este continuă pe [a,b] şi derivabilă pe (a,b), deci există $c \in (a,b)$ astfel încît $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, adică $\frac{b \ln b - a \ln a}{b - a} = 1 + \ln c$, unde $c = e^{\frac{b \ln b - a \ln a - b + a}{b - a}}$.

706. Aplicînd formula creşterilor finite polinomului $P_n(x) = x^n + px + q$ $(n \geq 2)$ în intervalul [0,x], să se determine θ care intervine în această formulă.

Soluţie Punînd b = x, a = 0 şi c = θx, teorema lui Lagrange se scrie $P_n(x) - P_n(0) = x P_n'(\theta x)$, adică $x^n + px + q - q = x[n(\theta x)^{n-1} + p]$; $x^{n-1} + p = n(\theta x)^{n-1} + p$; $\theta = \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$.

707. Să se arate că funcţiile f, g: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = arctg\, x$, $g(x) = -arctg \frac{1}{x}$ diferă prin cîte o constantă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$.

Soluţie $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; $g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. Deci $f'(x) = g'(x)$ şi $f(x) - g(x) = c_1$, $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(-1) - g(-1) = c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{\pi}{2}$; $f(x) - g(x) = c_2$, $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(1) - g(1) = c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{\pi}{2}$. Rezultă că $arctg\, x + arctg \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $x \in (-\infty, 0)$ şi $arctg\, x + arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $x \in (0, +\infty)$.

708. Să se demonstreze că $arctg\, a - arctg\, b \leq |a - b|$.

Soluţie Notăm $f(x) = arctg\, x$ şi aplicăm teorema lui Lagrange pe [a,b]:

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$, cu $\xi \in (a,b)$ sau

$|arctg\,a - arctg\,b| = \frac{1}{1+\xi^2}\cdot|b-a| \le |b-a|$ deoarece $\frac{1}{1+\xi^2} \le 1$.

709. Folosind formula $f(x)-f(x_0) \simeq (x-x_0)\,f'(x_0)$, să se calculeze valorile aproximative a) $\sqrt[3]{30}$ și b) $\sin 18°$.

Soluție

a) Considerăm funcția $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x \neq 0$.

Avem $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0} \simeq (x-x_0)\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$; luînd $x = 30$, $x_0 = 27$, rezultă:

$$\sqrt[3]{30} \simeq \sqrt[3]{27} + (30-27)\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = 3 + \frac{1}{9} \simeq 3 + 0{,}11 = 3{,}11$$

b) $\sin x \simeq \sin x_0 + (x-x_0)\cos x_0$. Luăm $x = 18°$, $x_0 = 60°$.

$$\sin 18° \simeq \sin 60° - \frac{13\pi}{45}\cos 60° \simeq 0{,}309017$$

710. Să se studieze semnul funcției f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)-x$.

Soluție Derivata este $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-1=-\frac{(x-1)^2}{1+x^2}\le 0$. Funcția este descrescătoare pe toată axa. Deoarece $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) > 0$ pentru $x < 0$ și $f(x) < 0$ pentru $x > 0$.

711. Să se studieze semnul funcției f: $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\sin x - tg\,x - 2x$.

R. În intervalul $(-\frac{\pi}{2},0)$, $f(x)>0$, iar în intervalul $(0,\frac{\pi}{2})$, $f(x)<0$.

712. Să se determine valoarea lui c care intervine în teorema lui Lagrange pentru următoarele funcții:

a) f: $[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1] \\ 2x-1, & x\in(1,2] \end{cases}$

b) f: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|\sin x|\cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$

Scanned with OKEN Scanner

c) f: $[4,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & x\in(0,3]\\ \frac{x}{2}+1, & x\in[-4,0]\end{cases}$

R. a) $c=\frac{3}{4}$; b) $c=\arccos\frac{2}{\pi}$; c) $c=\frac{13}{36}$

713. Să se determine intervalele de strictă monotonie ale următoarelor funcţii:

a) $f(x)=\frac{x^2}{2^x}$, $x\in\mathbb{R}$

b) $f(x)=\ln x-\operatorname{arctg} x$, $x>0$

R. a) Dacă $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{2}{\ln 2},+\infty)$, f este strict descrescătoare.

Dacă $x\in(0,\frac{2}{\ln 2})$, f este strict crescătoare.

b) f este strict crescătoare pe domeniul de definiţie.

714. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru următoarele funcţii:

a) $f(x)=1+x-x^3$, $x\in[-2,1]$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{x}{2}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ definită pe $[0,1]$

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x^2+1}, & -1\le x<0\\ x, & 0\le x\le 1\end{cases}$ definită pe $[-1,1]$

d) $f(x)=\begin{cases}x-3, & 1\le x<3\\ \frac{\ln(x-1)}{x-2}, & 3\le x\le 4\end{cases}$ definită pe $[1,4]$

R. a) $c=-1$; b) nu se poate aplica teorema lui Lagrange;

c) $c=-\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{3}}$; d) există o singură valoare $c\in(3,4)$.

715. Verificaţi dacă condiţiile din teorema lui Lagrange sînt verificate pentru funcţia $f(x)=x^3+5x^2-6x$ pe intervalul $[0,2]$ şi găsiţi valoarea intermediară corespunzătoare a lui c.

Scanned with OKEN Scanner

R. $c = \dfrac{-5+\sqrt{67}}{3}$

716. Aplicînd formula lui Lagrange, arătaţi că derivatele funcţiilor următoare iau valorile indicate pe intervalele respective. Verificaţi rezultatele.

a) $f(x)=2x^2-7$, $f'(x)=6$, $(1,2)$

b) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+5}$, $f'(x)=\dfrac{11}{24}$, $(-1,1)$

c) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$, $f'(x)=-\ln 9$, $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

d) $f(x)=\begin{cases} x & , \ 1\le x\le 2 \\ \dfrac{x^2}{4}+1 & , \ 2<x\le 3 \end{cases}$, $f'(x)=\dfrac{9}{8}$, $(1,3)$

V.6. TEOREMA LUI CAUCHY

717. Să se determine valoarea lui c, care intervine în formula lui Cauchy, pentru funcţiile f,g definite prin:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+3} & , \ -2\le x<1 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{4} & , \ 1\le x\le 5 \end{cases}$$

$g(x) = x$, $x \in [-2,5]$

Soluţie Funcţia g este continuă şi derivabilă pe [-2,5]. Pentru funcţia f trebuie să verificăm dacă este continuă şi derivabilă în punctul $x=1$. Avem: $f(1) = \lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = 2$, deci f este continuă pe $[-2,5]$.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} & , \ -2\le x<1 \\ \dfrac{1}{4} & , \ 1\le x\le 5 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x) = \dfrac{1}{4} = \lim\limits_{x\searrow 1} f'(x)$, deci f este derivabilă pe (-2,5). $g'(x) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd formula lui Cauchy, obţinem: $\frac{f(5)-f(-2)}{g(5)-g(-2)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, unde $g'(c) = 1$. Deoarece $\frac{2}{7} \neq \frac{1}{4}$, avem $\frac{2}{7} = \frac{1}{2\sqrt{c+3}} \Leftrightarrow c = \frac{1}{16}$.

718. Fie funcţiile $f(x) = e^x$ şi $g(x) = 2x+1$. Aplicaţi formula lui Cauchy pe intervalul $[0,1]$, apoi determinaţi punctul c.

Soluţie Funcţiile sint continue şi derivabile pe $[0,1]$;

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{e-1}{3-1} = \frac{e-1}{2} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{e^c}{2} \Leftrightarrow e^c = e-1 \Leftrightarrow c = \ln(e-1) \in (0,1).$$

719. Verificaţi condiţiile teoremei lui Cauchy pentru funcţiile:

a) $f(x) = x^2+2$ şi $g(x) = x^3-1$, $x \in [1,2]$ şi determinaţi punctul c.

b) acelaşi exerciţiu pentru funcţiile $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \cos x$ pe intervalul $[0,\pi/2]$.

R: a) $c = 14/9$; b) $c = \pi/4$.

720. Verificaţi condiţiile teoremei lui Cauchy pentru funcţiile $f(x) = x^2-2$ şi $g(x) = x^3+1$ pe intervalul $[1,2]$ şi determinaţi apoi valoarea lui c.

Soluţie Funcţiile f şi g sînt continue şi derivabile pe $[1,2]$. Avem de asemenea $f'(x) = 2x$ şi $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ pentru $x \in [1,2]$.

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{2+1}{9-2} = \frac{3}{7} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2c}{3c^2} \rightarrow c = \frac{14}{9} \in (1,2)$$

721. Să se demonstreze inegalitatea: $\ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} x \leq \ln 2 - \frac{\pi}{4}$, $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.

Soluţie Notăm $f(x) = \ln(1+x^2)$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Funcţiile f şi g verifică pe intervalul $[x,1]$ condiţiile teoremei lui Cauchy. Întradevăr, f şi g sînt continue pe $[x,1]$ cu $\frac{1}{2} \leq x$.

$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ există pe $(x,1)$. $g'(x) \neq 0$ pe $x \in (x,1)$, cu $\frac{1}{2} \leq x$. Aplicînd teorema lui Cauchy, rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, unde $\frac{1}{2}\le x<\xi<1$ sau $\frac{\ln(1+x^2)-\ln 2}{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}}=2\xi\ge 1$. Dar

$\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}<0$ pentru $0<x<1$, de unde rezultă $\ln(1+x^2)-\ln 2\le \operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}$ care este echivalentă cu inegalitatea $\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg}x\le \ln 2-\frac{\pi}{4}$

722. Aplicînd teorema lui Cauchy funcţiilor definite mai jos:

$$g(x)=f(x)+\frac{b-x}{1!}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)$$

$$h(x)=(b-x)^3$$

Să se verifice că dacă f are derivată de ordinul III pe $\mathbb{I}$, iar $a,b\in\mathbb{I}$, atunci există $c\in(a,b)$ astfel încît:

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(c)\ .$$

Soluţie Funcţiile f şi g sînt continue pe $\mathbb{I}$; g şi h sînt de asemenea derivabile pe $\mathbb{I}$, iar $h'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, deoarece $h'(x)=-3(b-x)^2$, $g'(x)=\frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)$. Aplicînd formula lui Cauchy funcţiilor g şi h avem

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(c)}{h'(c)} \text{ deci } \frac{f(b)-f(a)-\frac{b-a}{1!}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)}{-(b-a)^3}=\frac{\frac{(b-c)^2}{2!}f'''(c)}{-3(b-c)^2}$$

Adică $f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(c)$..

723. Să se determine valoarea lui c care intervine în formula lui Cauchy în cazul următoarelor funcţii:

a) $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ şi $g:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{e}{x}$

b) $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-x^2+1, & x\in(1,3]\\ -x+\frac{4}{3}, & x\in[0,1]\end{cases}$ şi $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x$

R. a) $c=\frac{e}{e-1}$; b) $c=\frac{2\sqrt{2}}{3}+1$

Scanned with OKEN Scanner

724. Verificați condițiile teoremei lui Cauchy pentru funcțiile $f(x)=\ln x$ și $g(x) = x^2$ pe intervalul închis $[\sqrt{2}, 2]$ și determinați punctul c.

R. $c = \sqrt{\dfrac{2}{\ln 2}} \in (\sqrt{2},2)$

725. Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Cauchy pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in [-3,3]$; $g(x) = x + \dfrac{1}{2}$, $x \in [-3,3]$

b) $f(x) = \ln x$, $x \in [1,e]$; $g(x) = \dfrac{x}{e} - 2$, $x \in [1,e]$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos^3 x, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$; $g(x) = x + \sin x$, $x \in [0,\pi]$

R. a) $c_{1,2} = \pm 3\sqrt{\sqrt{5} - 2}$; b) $c = e - 1$; c) Nu se poate aplica teorema lui Cauchy deoarece f nu este derivabilă în $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

V.7. FORMULA LUI TAYLOR ȘI FORMULA LUI MAC LAURIN

726. Să se scrie formula lui Mac Laurin de ordinul n pentru funcția: $f: [-a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a+x}$, $a > 0$.

Soluție $f(x) = \sqrt{a+x} = \sqrt{a\left(1+\dfrac{x}{a}\right)} = \sqrt{a}\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Aplicăm dezvoltarea lui $(1 + x)^k$ pentru $k = \dfrac{1}{2}$ și obținem:

$$f(x) = \left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} + (-1)^1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + (-1)^2\frac{1}{2^3}\frac{1\cdot 3}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!\cdot 2^n}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^n + R_n(x)\right]\cdot\sqrt{a}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{a}\left[1 + \frac{x}{2a} + \ldots + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-3)}{k! \cdot 2^k} \left(\frac{x}{a}\right)^k + R_n(x)\right]$$

727. Folosind formula lui Taylor cu restul de ordinul II, să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt[4]{260}$ evaluînd și eroarea făcută.

Soluție Considerăm funcția $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Formula lui Taylor cu restul de ordinul II este:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(\xi)$$

cu $x_0 < \xi < x$. $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $f''(x) = -\frac{3}{4^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$, $f'''(x) = \frac{3}{4^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}}$.

Luăm $x = 260$, $x_0 = 256$. $f(256) = 4$; $f'(256) = \frac{1}{4^4}$; $f''(256) = -\frac{3}{4^9}$

$$\text{Deci } \sqrt[4]{260} = 4 + \frac{4}{1!} \cdot \frac{1}{4^4} - \frac{4^2}{2!} \cdot \frac{3}{4^9} + \frac{4^3}{3!} f'''(\xi), \quad 256 < \xi < 260$$

Avem $\sqrt[4]{260} \approx 4 + 0{,}15625 - 0{,}000009 \approx 4{,}156241$.
Eroarea comisă este dată de:

$$|R_3(x)| = \left|\frac{4^3}{3!} \cdot \frac{3\cdot 7}{4^3} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}}\right| < \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{256^{11}}} < \frac{1}{10^6}$$

728. Să se calculeze $\sqrt[5]{250}$ cu 5 zecimale exacte. Să se evalueze eroarea comisă.

Soluție Fie $x_0 = 3^5 = 243$; aplicăm formula lui Taylor funcției $f(x) = \sqrt[5]{x}$ în jurul lui x_0

$$x^{\frac{1}{5}} = x_0^{\frac{1}{5}} + \frac{x-x_0}{5} x_0^{-\frac{4}{5}} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4\cdot \ldots \cdot (5n-6)}{5^n \cdot n!} x_0^{-\frac{5n-1}{5}} (x-x_0)^n + R_n(x)$$

cu $R_n(x) = \frac{(-1)^n \cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot (5n-1)}{5^{n+1}(n+1)!} \xi^{-\frac{5n+4}{5}} (x-x_0)^{n+1}$, unde $x_0 \le \xi \le x$.

Pentru $x_0 = 3^5$ trebuie ca $243 \le \xi \le 250$, $\frac{1}{\xi} \le \frac{1}{3^5}$ și astfel

Scanned with OKEN Scanner

$|R_n(x)| = \frac{4\cdot 9\cdot\ldots\cdot(5n-1)}{5^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{7^{n+1}}{3^{5n+4}} \le \frac{1}{10^5}$, inegalitate adevărată pentru $n = 2$, deci $\sqrt[5]{250} \approx 3 + \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{3^4} - \frac{7^2\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^9}$

729. Să se dezvolte în serie funcţia $f(x) = \frac{3x}{x^2+5x+6}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,-3\}$.

Soluţie Descompunînd funcţia dată în fracţii simple, obţinem: $\frac{3x}{x^2+5x+6} = \frac{9}{x+3} - \frac{6}{x+2}$. Folosind acum dezvoltarea funcţiei binomiale, deducem că:

$$\frac{9}{x+3} = 3\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}, \text{ pentru } |x| < 3 \text{ şi}$$

$$-\frac{6}{x+2} = -3\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1} = -3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}, \text{ pentru } |x| < 2.$$

Adunînd aceste două dezvoltări, obţinem

$$\frac{3x}{x^2+5x+6} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n, \text{ pentru } |x| < 2.$$

730. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Taylor limita $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a}$.

Soluţie $\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!}\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\sin[x+\theta(x-a)]$, $0<\theta<1$, de unde $\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a - \frac{x-a}{2!}\sin[a+\theta(x-a)]$, $0<\theta<1$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a$.

731. Dezvoltaţi polinomul $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ după puterile întregi ale binomului $(x - 2)$.

Soluţie $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$; $f^{(n)}(x) = 0$ pentru $n \ge 4$. De unde $f(2) = 11$; $f'(2) = 7$; $f''(2) = 8$; $f'''(2) = 6$.

Deci $x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + (x-2)\cdot 7 + \frac{(x-2)^2}{2!}\cdot 8 + \frac{(x-2)^3}{3!}\cdot 6 \Leftrightarrow$

$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$

Scanned with OKEN Scanner

732. Dezvoltaţi funcţia $f(x) = e^x$ după puterile binomului $x + 1$, oprindu-vă la termenul conţinînd pe $(x+1)^3$.

Soluţie $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(-1) = \frac{1}{e}$. În consecinţă

$$e^x = \frac{1}{e} + (x+1)\cdot\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2!}\cdot\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^3}{3!}\cdot\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^4}{4!}e^{\xi}, \text{ unde}$$

$\xi = -1 + \theta(x+1)$; $0<\theta<1$.

733. Să se afle primii termeni din dezvoltarea în serie Mac-Laurin a funcţiei $f(x) = \cos x$.

Soluţie $f(0) = 1$; $f'(x) = -\sin x$; $f'(0) = 0$; $f''(x) = -\cos x$; $f''(0) = -1$; $f'''(x) = \sin x$; $f'''(0) = 0$; $f^{(IV)}(x) = \cos x$; $f^{(IV)}(0) = 1$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(IV)}(0) + \ldots \Leftrightarrow$$

$$\cos x = 1 + \frac{x}{1!}\cdot 0 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}\cdot 0 + \frac{x^4}{4!}\cdot 1 + \ldots \Leftrightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

734. Dezvoltaţi funcţia $f(x) = \ln x$, după puterile lui $x-1$ oprindu-vă la termenul conţinînd pe $(x-1)^2$.

R. $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2(x-1)^3}{3!\,\xi_1^3}$ unde $\xi_1 = \theta_1 x$, $0<\theta_1<1$

735. Folosind formula lui Taylor să se calculeze următoarele limite de funcţii:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x^3}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

R. a) $-\frac{1}{12}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) 4; e) $\frac{1}{2}$.

736. Arătaţi că $\sin(a+h)$ diferă de $\sin a + h\cos a$ cu o cantitate inferioară lui $\frac{1}{2}h^2$.

Scanned with OKEN Scanner

737. Dezvoltaţi funcţia $f(x) = \sin x$, după puterile lui x, oprindu-vă la termenul conţinînd pe x^3 şi la termenul x^5.

R. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin\xi_1,\ \xi_1 = \theta_1 x\ ;\ 0 < \theta_1 < 1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\sin\xi_2,\ \xi_2 = \theta_2 x;\ 0 < \theta_2 < 1$$

738. Să se calculeze valoarea aproximativă a lui $\sqrt{1{,}01}$ cu o eroare $\leq 10^{-8}$.

R. Se pleacă de la relaţia $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ şi se găseşte $\sqrt{1{,}01} \approx 1{,}0049875$, cu o eroare $\leq 10^{-8}$.

V.8. REGULILE LUI L'HÔPITAL ŞI APLICAREA LOR LA CALCULUL LIMITELOR

Exerciţii cu limite care conduc la nedeterminări de forma $\frac{0}{0}$

Să se calculeze:

739. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$

Soluţie Ne asigurăm că limita este de tipul $\frac{0}{0}$. Avem

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \frac{1-1}{0-1+1} = \frac{0}{0}$$

Fie funcţiile $f: (0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^x - x$ şi $g: (0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \ln x - x + 1$.

a) f şi g sînt derivabile pentru $\forall\, x > 0$ şi

$$f'(x) = x^x \ln(x+1) - 1,\ g'(x) = \frac{1}{x} - 1,\ f''(x) = x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1},\ g''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

b) $g''(x) \neq 0$ pentru $x > 0$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} g'(x) = 0$

Scanned with OKEN Scanner

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-2.$

Pe baza corolarului avem $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-2.$

740. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$

Soluţie Fie funcţiile $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}(x)-x$ şi

$g:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-\sin x$

a) f şi g sînt derivabile pentru $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$,

$g'(x)=1-\cos x$.

b) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)-\{0\}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x(1-\cos x)}=2$

Avem deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=2.$

741. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x}{\sin(\sin x)}$

Soluţie Funcţiile îndeplinesc condiţiile regulii lui l'Hôpital şi avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x+e^x\cos x-1}{\cos(\sin x)\cdot\cos x}=0$$

742. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)-\alpha}{\alpha^2}$

Soluţie Aplicînd regula lui l'Hôpital de două ori avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)-\alpha}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha+1}-1}{2\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\frac{1}{(\alpha+1)^2}}{2}=-\frac{1}{2}$$

743. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ pentru funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$

şi $g:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln\cos x$

Soluţie

a) Funcţiile f şi g sînt derivabile admiţînd derivate de ordinul al doilea.

$$f'(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x<0\\ 2x, & x>0\end{cases}$$

$f'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin^2 x}{x}=0$, $f'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2}{x}=0$ rezultă că $f'(0)=0$.

Mai calculăm $f''(x)=\begin{cases}2\cos 2x, & x<0\\ 2, & x>0\end{cases}$, $f''(0)=2$.

$g'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$, $g''(x)=-(1+\operatorname{tg}^2 x)$.

b) $g''(x)\neq 0$ pentru orice x

c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=-2$.

Avem deci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=-2$.

744. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}$

Soluţie Aplicînd de două ori succesiv regula lui l'Hôpital găsim:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}-n}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

745. Calculaţi următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x e^{ax} - 2ax}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3^{\sin^2 x} - 3^{\sin x}}{x - \frac{\pi}{2}}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{3x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln x^p - \ln a^p}{x - a}$

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - x^2}}$

h) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{\cos x + 1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{\sin (n+1)x \cdot \sin (n+2)x \cdot \ldots \cdot \sin 2nx}$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{2x+8} - \sqrt[n]{8x+2}}{\sqrt[n]{7x+3} - \sqrt[n]{6x+4}}$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2}}$

R. a) $a \neq \frac{1}{2}$, $l = 0$, pentru $a = \frac{1}{2}$, $l = 2$; b) 0; c) 0; d) $-\frac{1}{12}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{p}{a}$; g) -1; h) 2; i) $l = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; j) -6; k) $\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

Exerciţii cu limite care duc la nedeterminări de forma $\frac{\infty}{\infty}$

Să se calculeze:

746. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)}$

Soluţie Fie funcţiile $f : \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sin 2x)$ şi $g : \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(\sin 3x)$

Scanned with OKEN Scanner

a) f și g sînt derivabile în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ și $f'(x) = 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$, $g'(x) = 3\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$;

b) $g'(x) \neq 0$ în intervalul considerat.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |f(x)| = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |g(x)| = \infty$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{3\frac{\cos 3x}{\sin 3x}} = 1$

În baza corolarului avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)} = 1$

747. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$, $n \in \mathbb{N}$

Soluție Aplicînd regula lui l'Hôpital de n ori avem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

748. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$

Soluție Aplicăm regula lui l'Hôpital și avem:

$$\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \frac{-6\sin 3x\cos 3x}{-2\sin x\cos x} = \lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-\sin x} = 3$$

749. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

a) Notăm $f(x) = \ln(2 + e^{3x})$, $g(x) = \ln(3 + e^{2x})$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$

b) f și g sînt derivabile pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ și $f'(x) = \dfrac{3e^{3x}}{2 + e^{3x}}$,

$g'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{3 + e^{2x}} \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}(3 + e^{2x})}{2e^{2x}(2 + e^{2x})} = \frac{3}{2}$$

Deci $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} = \dfrac{3}{2}$.

750. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^8 - x + 1)}$

Soluție $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^8 - x + 1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2 + x + 1} \cdot (2x + 1)}{\frac{1}{x^8 - x + 1} \cdot (8x^7 - 1)} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^8 - x + 1)\cdot(2x + 1)}{(8x^7 - 1)\cdot(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{4}$$

751.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}{2x + 3}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln \sin x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

Scanned with OKEN Scanner

R. a) -1; b) 1; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 0; e) 1; f) 1; g) ∞; h) $\frac{1}{2}$; i) $-\frac{1}{3}$.

Exerciții cu limite care conduc la nedeterminări de forma $0 \cdot \infty$

752. Calculați $\lim\limits_{x \searrow 0} x^2 \ln x$

Soluție Fie funcțiile $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$, sîntem în cazul de excepție $0 \cdot \infty$

$$\text{Scriem } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = 0$$

753. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$

Soluție

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (-\sin^2 x) = -1$$

754. $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\sin \frac{nx + 1}{n} - \sin x \right)$

Soluție $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\sin \frac{nx + 1}{n} - \sin x \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{nx + 1}{n} - \sin x}{\frac{1}{n}} =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cos \frac{nx + 1}{n} \cdot \left(-\frac{1}{n^2} \right)}{-\frac{1}{n^2}} = \cos x$$

Scanned with OKEN Scanner

755. $\lim\limits_{x\to a}(x-a)\cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{a}$

Soluție $\lim\limits_{x\to a}(x-a)\cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{a}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi x}{a}}\cdot\dfrac{\pi}{a}}=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a\cos^2\frac{\pi x}{a}}{\pi}=\frac{a}{\pi}$$

756. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sec 2x$

Soluție

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sec 2x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{-2\sin 2x}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

757. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x+2\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}2x)$

Soluție

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x+2\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}2x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}+2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{ctg}x}{\frac{1}{\operatorname{ctg}2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{ctg}x}+2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}+2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{2\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}}=$$

$$=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 2x}-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 x}=-2-1=-3$$

Scanned with OKEN Scanner

758. a) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x + \operatorname{tg} x + \sec x - 1)(\cos x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x - 1)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x)(\cos^2 x + 2\operatorname{ctg}^2 x)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^k}(\sin^k x + \sin^k 2x + \ldots + \sin^k nx)$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^{2n} x}(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x)\ldots(1 - \sin^n x)$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x e^{\frac{1}{\sin x}}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0}(x^4 \ln x)$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(\cos x)\ln x$

R. a) 4; b) 6; c) $+\infty$; d) se ţine cont că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{x} = n$ şi găsim $\sum\limits_{1}^{n} n$; e) $\sum\limits_{1}^{n} n^k$; f) se ţine seama că $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{2}$, găsim $\frac{n!}{2^n}$; g) $+\infty$; h) 0; i) 0.

Exerciţii cu limite care conduc la nedeterminări de forma $\infty - \infty$

759. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$

Soluţie $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \frac{-0}{1+0} = 0$

Scanned with OKEN Scanner

760. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

Soluție

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x-1}{1-\frac{1}{x}+\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

761. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

Soluție

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2\cos x}{\pi}-\frac{\operatorname{ctg}x}{x}}{\frac{2\cos x\operatorname{ctg}x}{\pi x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\cos x-\pi\operatorname{ctg}x}{2\cos x\operatorname{ctg}x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\frac{\pi}{\sin x}}{2\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-2\sin x}=-1$$

762. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

Soluție $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$

După ce aplicăm regula lui l'Hôpital găsim:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos^2 x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

763. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arcsin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

Soluție

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\arcsin x+2\sqrt{1-x^2}}=0$$

764. a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\ldots+\sqrt{x+n}-n\sqrt{x})$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x-6}-x)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sqrt{x^2+4x+2}-x-2\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right]$, $x\in\mathbb{R}_+^*$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}-x\right)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{ax^3+x^2+bx+c}-(bx+c)\right]$, $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

R. a) 0; b) -2,5; c) -2; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$; f) dacă $a\neq b^2$, limita este $+\infty$ dacă $a>b^2$ și $-\infty$ dacă $a<b^2$; dacă $a=b^2$ și $1-3b^2c\neq 0$, limita este $\dfrac{1-3b^2c}{3b^2}$; dacă $a=b^2$ și $c=\dfrac{1}{3b^2}$ limita este 0; g) 1; h) -1; i) $\frac{2}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

Exerciţii cu limite care conduc la nedeterminări de formă 0^0

Să se calculeze:

765. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\sin x}$

Soluţie

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\sin x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{(\sin x\cdot \ln x)} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot \cos x}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot \frac{x}{\cos x}} = e^0 = 1$$

766. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$

Soluţie Notăm $x^x = y$, $\ln y = x \ln x$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x \ln x) =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0, \text{ de unde } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = e^0 = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1$$

767. a) $\lim\limits_{x\to 0} (a^x - 1)^x$, $a > 1$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x - 1)^{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin^2 x}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{x - \frac{\pi}{2}}$

R. a) 1; b) $\frac{1}{e}$; c) 1; d) 1; e) 1.

Scanned with OKEN Scanner

768. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)^{x-2}$

Soluţie

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)^{x-2} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)\ln(x-2)} = e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x-2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{1}{(x-2)^2}}}$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 2}(x-2)} = e^{-0} = 1$$

769. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{3\sin^2 x}$

Soluţie

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{3\sin^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} 3\sin^2 x\cdot \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\ln x}{\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{3}{x}}{-\frac{1}{\sin^4 x}\cdot 2\sin x\cos x}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin^3 x}{2x\cdot\cos x}} = e^{-\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{x^2}{\cos x}} = e^0 = 1$$

770. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\operatorname{tg} x}$

Soluţie

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\operatorname{tg} x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\operatorname{tg} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot x} = e^{-0} = 1$$

Exerciţii cu limite care conduc la nedeterminări de forma ∞^0

Să se calculeze:

771. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1$

772. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Soluție

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}\cdot \ln \operatorname{ctg} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{\sin x\cos x}}{\frac{1}{x}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x\cos x}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}} = e^{-1\cdot 1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

773. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

Soluție

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg} x\cdot \ln\frac{1}{x}\right]} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}[\operatorname{tg} x\cdot \ln x]} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}}$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0} x} = e^0 = 1$$

774. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$

Soluție $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot \ln \operatorname{ctg} x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\cdot\cos x}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = e^0 = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

775. a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\cdot e)^{\frac{1}{x^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-\cos x}{1-\cos x}\right)^{\sin^2 x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x^2-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x)^{2\sqrt{x}}$

R. Toate limitele au valoarea 1.

Exerciții cu limite care conduc la nedeterminări de forma 1^∞

Să se calculeze:

776. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

Soluție

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(x+e^x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+e^x}{1}}=e^2.$$

777. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Soluție Avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos 2x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$, deci cazul 1^∞.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\cos 2x}}=e^{\frac{3}{2}}$$

778. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$

Soluție $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}-1)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x^{\frac{1}{2}}}{2x}}=$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^2}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Scanned with OKEN Scanner

779. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$, $x>0$

Soluţie

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{1-\frac{2}{x^2}}}=e^3$$

780. $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2x}$

Soluţie

$$\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\operatorname{ctg}^2x\cdot\ln(1+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{tg}^2x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos^2x}{\operatorname{tg}x\cdot(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^3x}{\frac{\sin x}{x}\cdot(1+x^2)}}=e$$

781. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}$

Soluţie

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\ln\cos x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{\frac{1}{\cos^2x}}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to0}\sin x\cos x}=e^0=1$$

782. a) $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+kx)\right]^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{cosec}x}$

Scanned with OKEN Scanner

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\sqrt[3]{\cos x}\cdot\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+2x^2+3x+4}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{x}}{1+b\operatorname{tg}\frac{\beta}{x}}\right)^x$, $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cosec}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

i) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\lim\limits_{x\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{x-k}{x+k}\right)^x\right]=0$

R a) $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; c) 1; d) $\dfrac{13}{e^6}$; e) $\dfrac{1}{e}$; f) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; g) $e^{-a\alpha-b\beta}$; h) e^2

V.9. CALCULUL VALORILOR APROXIMATIVE ALE SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR

783. Folosind metoda înjumătățirii segmentului să se determine rădăcina pozitivă subunitară a ecuației:
$x^3-0{,}6x^2-2{,}25x+1{,}35=0$, cu eroarea de cel mult $5\cdot 10^{-2}$.

Soluție Se verifică imediat că ecuația admite soluție unică în intervalul (0,1). În plus, $f(x)=x^3-0{,}6x^2-2{,}25x+1{,}35$ este continuă și monotonă în acest interval, prin urmare putem aplica metoda înjumătățirii intervalului.

Cum $x_1=0{,}5$ și $f(0{,}5)\cdot f(1)<0$, rezultă că soluția se află în intervalul (0,5,1) deci $x_2=0{,}75$.

Analog $f(0{,}5)\cdot f(0{,}75)<0\Rightarrow x_3=0{,}63$. Continuînd în acest fel

Scanned with OKEN Scanner

găsim $x_4 = 0,57$ și $x_5 = 0,6$; $x_5 = 0,6$ este chiar valoarea exactă a rădăcinii.

784. Prin rezolvarea unei ecuații algebrice să se calculeze cu trei zecimale sin 50°.

Soluție $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Se consideră $x = 50°$, deci $\sin 3x = \sin 150° = 0,5$ astfel că obținem ecuația $f(y) = 8y^3 - 6y + 1 = 0$, unde $y = \sin 50°$ și deci se caută o rădăcină pozitivă subunitară a acesteia.

$$f'(y) = 24y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 0,5$$

Se consideră $f(0) = 1$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, $f(1) = 3$ și se găsește

$y = \sin 50° \approx 0,766$.

785. Să se calculeze, cu o eroare de cel mult 10^{-2}, soluțiile următoarelor ecuații:

a) $x^5 - x - 2 = 0$;

b) $4x = \cos x$;

c) $x \ln x - 14 = 0$;

d) $x^x + 2x - 6 = 0$;

e) $e^x + e^{-3x} - 1 = 0$;

f) $\lg x = \frac{1}{x}$.

Soluție a) 2,09; b) 0,24; c) 7,13; d) 1,72; e) 1,38; f) 2,51.

786. Folosind metoda coardei, să se determine, cu 4 cifre exacte soluțiile ecuației $x^5 - 0,5x^3 - 3,94x^2 + 2x - 0,24 = 0$

Soluție $x_1 = -1,414$; $x_2 = 0,200$; $x_3 = 0,200$; $x_4 = 1,414$.

787. Cu ajutorul metodei tangentei calculați rădăcinile ecuației $f(x) = 2x - \ln x - 4$.

Soluție $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2}$.

Pe [2,3], avem $f'(x) > 0$ și $f''(x) > 0$; $f(2) \cdot f(3) < 0$, $f(3) \cdot f''(3) > 0$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 3 - 0,6(2 - \ln 3) = 2,4592$$

$x_2 = 2,4592 - 0,6(2 \cdot 2,4592 - \ln 2,4592 - 4) = 2,4481$

$x_3 = 2,4481 - 0,6(2 \cdot 2,4481 - \ln 2,4481 - 4) = 2,4477$

Scanned with OKEN Scanner

$x_4 = 2{,}4477 - 0{,}6(2 \cdot 2{,}4477 - \ln 2{,}4477 - 4) = 2{,}4475$

Rădăcina este aproximativ 2,45.

788. Să se găsească grafic intervalul unde se află o rădăcină a ecuației $x^3 + x - 1 = 0$.

Soluție Scriem $x = \dfrac{1}{1+x^2}$ și reprezentăm grafic funcțiile $y = x$ și $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Avem:

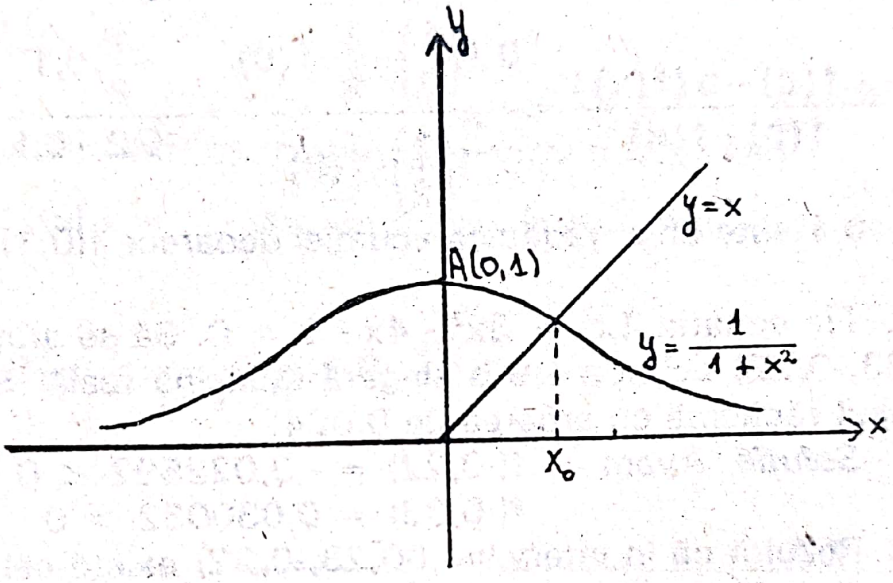


Fig. 23.

Constatăm că ecuația are o singură rădăcină pozitivă, cuprinsă în intervalul (0,1).

Luînd $x_0 = 0{,}7$, găsim $x_1 = 0{,}671$; $x_2 = 0{,}690$; $x_3 = 0{,}678$; $x_4 = 0{,}685$; $x_5 = 0{,}681$; $x_6 = 0{,}683$ deci cu două zecimale exacte rădăcina căutată este 0,68.

789. Să se calculeze, cu trei cifre semnificative, rădăcinile reale ale următoarei ecuații: $\cos x = x^2$, aplicînd metoda tangentei.

Soluție $x_1 = x_2 = 0{,}824$.

790. Să se determine cu trei zecimale exacte rădăcinile reale ale ecuațiilor:

a) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$;

b) $x^3 + 2x + 1 = 0$;

Soluție a) -0,532; 0,652; 2,879; b) -0,453.

Scanned with OKEN Scanner

791. Folosind metoda coardei să se aproximeze rădăcina reală a ecuației $f(x) = x^2 - 1,1x + 0,1 = 0$ în intervalul $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Soluție $f(0) = 0,1 > 0$;

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1,1}{2} + 0,1 = \frac{1 - 2,2 + 0,4}{4} = -\frac{0,8}{4} < 0$ deci $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, f este continuă și derivabilă pe $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $a = 0$; $b = \frac{1}{2}$

$$x_1 = \frac{a.f(b) - b(f(x))}{f(b) - f(a)} = \frac{0.f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}.f(0)}{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)} = \frac{-\frac{1}{2}.0,1}{-0,2 - 0,1} = \frac{0,1}{2.0,3} = \frac{1}{6} \approx 0,1$$

$x_1 = 0,1$ este chiar rădăcina ecuației deoarece $f(0,1) = 0$.

792. Fie ecuația $4x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$. Să se arate că în intervalul $(-0,23,-0,22)$ ecuația are o singură rădăcină reală. Să se aproximeze această rădăcină cu eroarea de 0,004.

Soluție Avem $f(-0,22) = -0,022592 < 0$

$f(-0,23) = 0,030032 > 0$

Rezultă că în intervalul $(-0,23,-0,22)$ există cel puțin o rădăcină a ecuației. Fie x_1 o rădăcină din acest interval. Deoarece $f'(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f''(x) = 24x + 6$ și $f''(x) > 0$ rezultă că f' este crescătoare în intervalul $[-0,23 , -0,22]$. Însă $f'(x) < 0$ pentru $x \in [-0,23 . -0,22]$, rezultă că x_1 este unica rădăcină în intervalul menționat și $m_1 = \min|f'(x)| = |f'(-0,22)|$, dacă $-0,23 \leq x \leq -0,22$. Deci $m_1 = 4,7452$. Efectuînd calculele, se obține $|x_1 - \xi| \leq 0,004$, unde $\xi = -0,22$. Deci $\xi = -0,22$ este o aproximație a lui x_1 cu eroarea de 0,004.

V.10. ROLUL DERIVATELOR ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

793. Determinați intervalele unde funcția $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ este crescătoare, descrescătoare și găsiți coordonatele vîrfului parabolei date.

Soluție $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Pentru $x \in (-\infty,2)$, $f(x)$ este strict descrescătoare.

Pentru $x \in (2,+\infty)$, $f(x)$ este strict crescătoare, iar pentru $x = 2$ avem un minim m $(2,-3)$.

794. Determinați intervalele de monotonie pentru funcția $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

Soluție Punctul $x = -2$ este un punct de discontinuitate pentru funcția $f(x)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0 \quad \text{pentru } x \neq -2.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	|	$\searrow$	

$f(x)$ este strict descrescătoare pentru $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$.

795. Studiați monotonia și extremele funcției $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$

Soluție Domeniul de definiție este $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.

$$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}} \neq 0 \text{ , nu se anulează în domeniul de definiție.}$$

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$+\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x \in (-\infty,-1)$, $f(x)$ este strict descrescătoare.
Pentru $x \in (1,+\infty)$, $f(x)$ este strict crescătoare.
În $x = -1$ și $x = 1$ avem punctele de minim absolut.

796. Găsiți cea mai mică valoare și cea mai mare valoare a funcției $f(x) = x^3 - 3x + 3$ pe intervalul $\left[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$. Care sînt intervalele de monotonie?

Soluție $f(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ și $x_2 = 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	

$\max\limits_{x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]} f(x) = \frac{89}{8}$ deoarece f este strict crescătoare pe $\left[1,\frac{5}{2}\right]$

și $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{89}{8}$

$$\min_{x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]} f(x) = 1 \quad ; \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{33}{8} > 1$$

$f(x)$ este strict crescătoare pentru $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ și strict descrescătoare pentru $x \in (-1,1)$.

797. Determinați intervalele de concavitate și convexitate, precum și punctele de inflexiune pentru funcția $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$

Soluție $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$;

$$f''(x) = 12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f"(x)	-	-	0	+	+
f(x)	⌒		$-\frac{23}{2}$	⌣	

Pentru $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ funcția f(x) este concavă, iar pentru $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, f(x) este convexă.

Punctul $I\left(\frac{1}{2}, -\frac{23}{2}\right)$ este punct de inflexiune.

798. Studiați semnul derivatei a II-a pentru funcția $f(x) = \sqrt{x}$

Soluție $D_f = [0, +\infty)$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

x	0		$+\infty$
f"(x)	0	-	
f(x)	|	⌒	

f(x) este concavă pentru $x \in (0, \infty)$.

799. Determinați intervalele de monotonie pentru funcțiile:

a) $f(x) = x^3 (8-x)$

b) $f(x) = \frac{2 - 5x}{3x + 4}$

Scanned with OKEN Scanner

c) $f(x) = \ln x - \operatorname{arctg} x$
d) $f(x) = x - \operatorname{tg} x$

Soluție

a) strict crescătoare pe $(-\infty, 6)$ și strict descrescătoare pe $(6, +\infty)$.

b) strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

c) strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.)

d) strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left\{\left[0, \frac{\pi}{2}\right] - \frac{\pi}{2}\right\}$

800. Determinați punctele de extrem relativ pentru funcțiile:

a) $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$;

b) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

c) $f(x) = \sin x - \cos x$, pentru $x \in [0, 2\pi]$;

d) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

e) $f(x) = \ln \cos x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

f) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$;

Soluție

a) $x_0 = \dfrac{1}{2}$ este un punct de minim;

b) $x_0 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ este un punct de maxim;

Scanned with OKEN Scanner

c) $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ este un punct de minim, iar $x_2 = \frac{7\pi}{4}$ este un punct de maxim;

d) $x_0 = e$ este punct de maxim;

e) $x_0 = 0$ este punct de maxim ;
f) $x_0 = \ln 2$ este punct de maxim.

801. Găsiți intervalele de concavitate și de convexitate pentru funcțiile:
a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$;
b) $f(x) = (x+1)^4$;

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

d) $f(x) = x^2 \ln x$;

e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Soluție

a) convexă pe $\mathbb{R}$;
b) convexă pe $\mathbb{R}$;
c) convexă pe $(-\infty,-1)$ și concavă pe $(1,+\infty)$;

d) convexă pe $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}},+\infty\right)$ și concavă pe $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$;

e) convexă pe $(-\infty,1)$ și concavă pe $(1,+\infty)$.

802. Determinați abscisele punctelor de inflexiune pentru funcțiile:
a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$;

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+12}$;

d) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$;
e) $f(x) = \sin x - \cos x$, $x \in [0,2\pi]$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

a) $x_0 = 2$;

b) $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

c) $x_1 = -6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$;

d) $x_0 = 0$;

e) $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

803. Studiați intervalele de concavitate, convexitate și punctele de inflexiune pentru curba lui Gauss $f(x) = e^{-x^2}$.

Soluție $f'(x) = -2x e^{-x^2}$; $f''(x) = (4x^2 - 2) e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

și $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		⌣	$\frac{\sqrt{e}}{e}$	⌢	$\frac{\sqrt{e}}{e}$	⌣	

$f(x)$ este convexă pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ și concavă pentru $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Există 2 puncte de inflexiune: $I_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ și

Scanned with OKEN Scanner

$I_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$.

V.11. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

804. Să se reprezinte grafic funcția $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{-x^2+x+6}}$.

Soluție

a) Domeniul de definiție:

$x-1=0\Rightarrow x=1$

$-x^2+x+6=0\Rightarrow x_1=3,\ x_2=-2$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \frac{x-1}{-x^2+x+6}\right\}.$$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$		0	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x^2+x+6$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{x-1}{-x^2+x+6}$	$+$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$-$

$D_f=(-\infty,-2)\cup[1,3)$.

b) Intersecția cu axele:

$$\cap x'ox:\begin{cases}y=0\\ y=\sqrt{\frac{x-1}{-x^2+x+6}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=0\\ x-1=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\rightarrow A(1,0)$$

Scanned with OKEN Scanner

$\cap y'oy: \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{\dfrac{x-1}{-x^2+x+6}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{-\dfrac{1}{6}} \notin \mathbb{R} \end{cases}$, deci curba nu intersectează axa y'oy.

c) Simetrii: $f(-x)=\sqrt{\dfrac{-x-1}{-x^2-x-6}}=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+x-6}} \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$.

d) Periodicitate: $f(x+T) \neq f(x)$. Nu există nici un $T > 0$ astfel încît să avem $f(x+T) = f(x)$, deci funcţia $f(x)$ nu este periodică.

e) Continuitate: Funcţia $f(x)$ este continuă pentru orice $x \in (-\infty,-2) \cup [1,3)$.

$$\lim_{\substack{x\to -2 \\ x<-2}} \sqrt{\frac{x-1}{-x^2+x+6}} = +\infty \; ; \quad \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \sqrt{\frac{x-1}{-x^2+x+6}} = 0 \; ; \quad \lim_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} \sqrt{\frac{x-1}{-x^2+x+6}} = +\infty \; ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x-1}{-x^2+x+6}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} = 0 \; .$$

f) Derivabilitate: $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+7}{2(-x^2+x+6)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{-x^2+x+6}}}$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{x^2-2x+7}{2(-x^2+x+6)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{-x^2+x+6}}} = +\infty$$

, adică tangenta este paralelă cu axa Oy. În celelalte puncte ale intervalelor de definiţie, funcţia $f(x)$ este derivabilă.

g) Monotonie, puncte de extrem. Deoarece

Scanned with OKEN Scanner

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+7}{2(-x^2+x+6)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{-x^2+x+6}}} \neq 0$$, întrucît $x^2 - 2x + 7 > 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$,

funcția nu are extreme.

h) Convexitate, concavitate, puncte de inflexiune: Din cauza calculelor prea complicate, renunțăm la calculul derivatei a II-a.

i) Asimptote: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală;

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty$, deci $x = -2$ și $x = 3$ sînt asimptote verticale spre $+\infty$. Asimptotă oblică nu există.

j) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		1		3
f'(x)	0	+	+	+	+	+	+
f(x)	0	↗	$+\infty$		0		$+\infty$

k) Graficul:

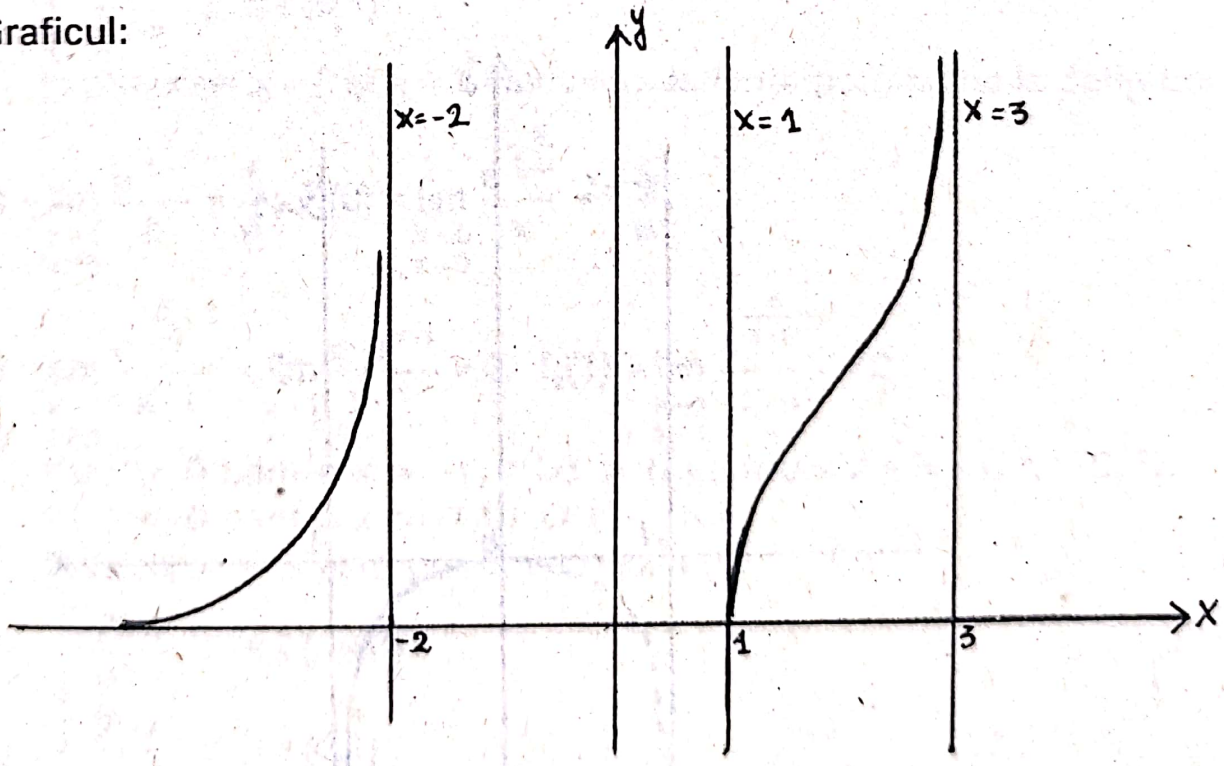


Fig. 24.

Scanned with OKEN Scanner

805. Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = \ln(1-x^2)$.

Soluţie Domeniul de definiţie este $(-1,1)$. Deoarece funcţia este pară este suficient să o studiem în intervalul $[0,1)$.

$$\cap(y'oy): \begin{cases} x = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}; \quad \cap(x'ox): \begin{cases} y = 0 \\ y = \ln(1-x^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2} \Rightarrow x = 0$, $f(0) = 0$, deci pentru $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$.

$f''(x) = -2\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \neq 0$, dar $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in [0,1)$.

Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$.

x	0				1
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$			$-\infty$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	

Graficul funcţiei $f(x) = \ln(1-x^2)$ este în figura de mai jos:

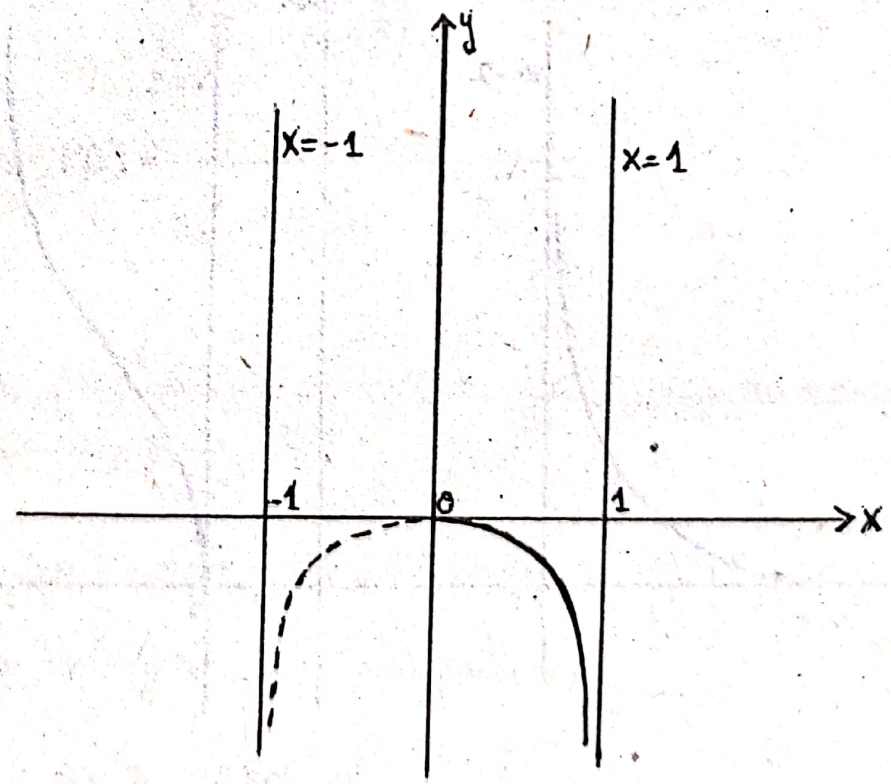


Fig. 25.

Scanned with OKEN Scanner

806. Să se reprezinte grafic funcţia f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

Soluţie Avem:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{e^{1-x}}, & x\in(-\infty,0)\\ 0, & x=0\\ \dfrac{x}{e^{1-x}}, & x\in(0,1)\\ 1, & x=1\\ \dfrac{x}{e^{x-1}}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{e^{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{-e^{1-x}}=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1+x}{e^{1-x}}, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{1-x}{e^{x-1}}, & x\in(1,+\infty)\\ \dfrac{1+x}{e^{1-x}}, & x\in(0,1)\end{cases}$$

În punctele $x=0$ şi $x=1$ calculăm derivata pornind de la definiţie:

$$f'_d(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{\frac{x}{1-x}}}{x}=\frac{1}{e};\quad f'_s(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{e^{\frac{-x}{1-x}}}{x}=-\frac{1}{e};$$

$$f'_d(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{e^{\frac{x}{x-1}-1}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x-e^{x-1}}{x-1}=0;\quad f'_s(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{e^{\frac{x}{1-x}-1}}{x-1}=2.$$

$f'(x)=0$ pentru $x=-1$; $f'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

$f'(x)<0$ pentru $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

Punctul $x=1$ este punct de maxim.

$$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{2+x}{e^{1-x}}, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{2+x}{e^{1-x}}, & x\in(0,1)\\ \dfrac{x-2}{e^{1-x}}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$f''(x) = 0$, dacă $x = -2$ și $x = 2$.

$f''(x) > 0$, dacă $x \in (-\infty,-2) \cup (0,1) \cup (2,+\infty)$.

$f''(x) < 0$, dacă $x \in (-2,0) \cup (1,2)$.

Punctele $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ sînt puncte de inflexiune.

Funcția nu are asimptote oblice și verticale. Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală.

Tabloul de variație este

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-\frac{1}{e}$	$\|$	$\frac{1}{e}$	2	$\|$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e^3}$		$\frac{1}{e^2}$		0	$\nearrow$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\|$	$+$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$

Funcția este reprezentată în figura de mai jos:

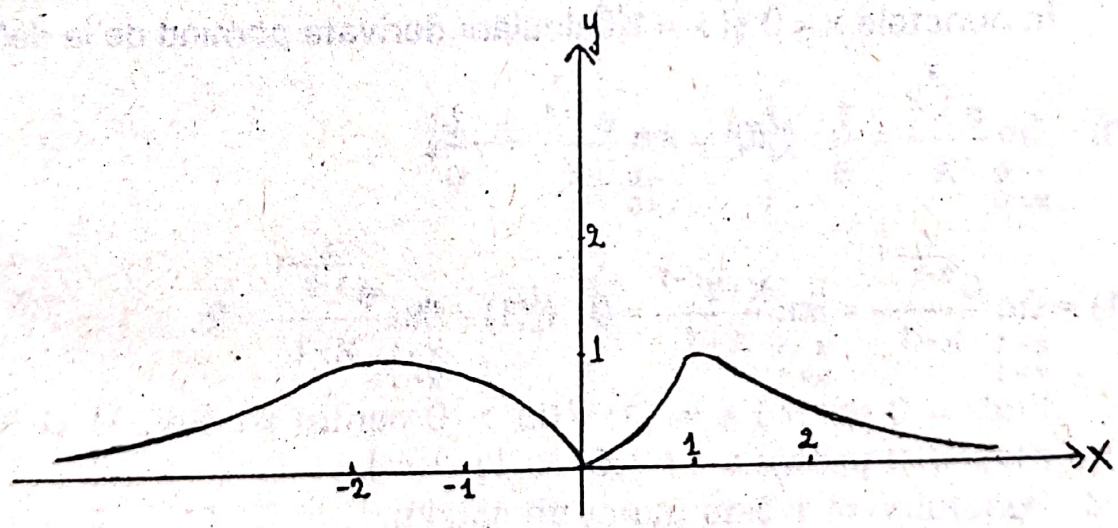


Fig. 26.

807. Dîndu-se funcția $f(x) = \frac{x^2+\alpha x+\beta}{x-1}$,

a) Să se determine α și β astfel ca $f(x)$ să admită un extrem în punctul $M(0,1)$.

b) Să se studieze variația funcției $y = f'(x)$ pentru α și β determinați la punctul a).

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

a) Trebuie ca $f'(x) = 0$ și $f(0) = 1$. $f'(x) = \frac{x^2-2x-\alpha-\beta}{(x-1)^2}$, care pentru $x = 0$, trebuie să dea $\alpha + \beta = 0$, iar funcția pentru $x = 0$ ne dă $\beta = -1$ și deci $\alpha = 1$.

b) $y = f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $x \in \mathbb{R}-\{1\}$, y se anulează pentru $x = 0$ și $x = 2$. Are asimptotă verticală $x = 1$ și orizontală $y = 1$, căci $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1$.

$y' = \frac{2}{(x-1)^3}$, care pentru $x < 1$, $y' < 0$ și pentru $x > 1$, $y' > 0$.

$y'' = -\frac{6}{(x-1)^4}$ și deci $y'' < 0$ pe domeniul de definiție.

x	$-\infty$		0			1			2		$+\infty$
y'		-	|	-		|		+	|	+	
y	1	↘	0	↘	$-\infty$	|	$-\infty$	↗	0	↗	1
y''		-	|	-		|		-	|	-	

$x = 1$ este axă de simetrie, deoarece $y(1-\alpha) = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}$ și $y(1+\alpha) = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}$.

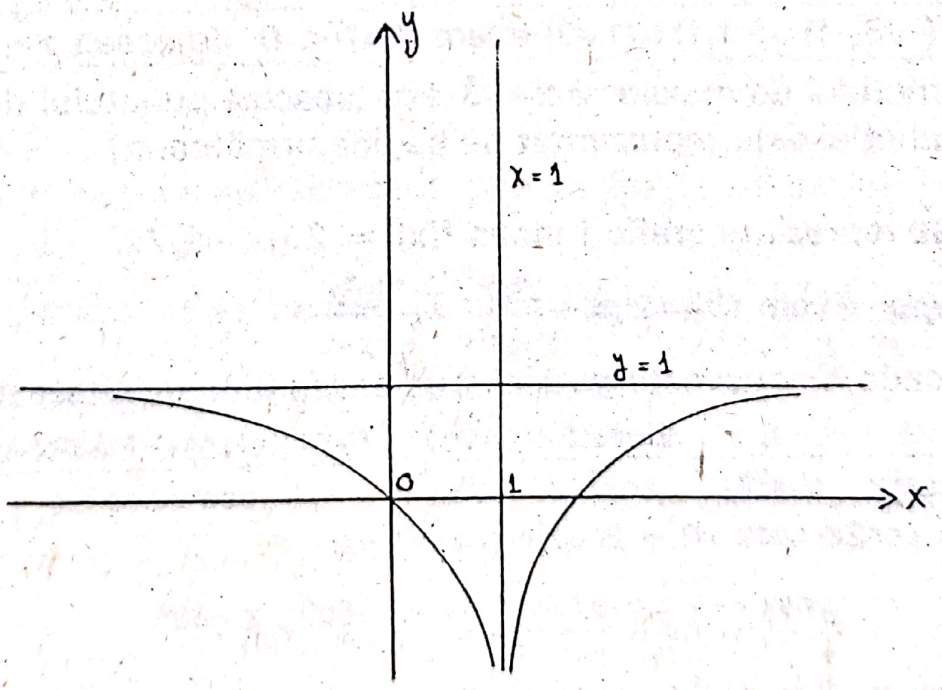


Fig. 27.

Scanned with OKEN Scanner

808. Să se determine constanta reală a astfel încît funcţia f definită prin $f(x)=x+\frac{ax}{x^2-1}$ să verifice condiţia $f'(0)=0$, apoi să se traseze graficul acestei funcţii pe domeniul ei maxim de definiţie.

Soluţie Domeniul de definiţie al funcţiei este:

$D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Avem $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\frac{ax}{x^2-1}}{x}=1-a$ şi din $f'(0)=0$ găsim $a=1$. Astfel $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. Deoarece $f(-x)=-f(x)$ pentru orice x din domeniul de definiţie, f este impară. De aceea, graficul ei va fi simetric în raport cu originea axelor de coordonatelor. Prin calcul direct obţinem

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=0.$$

Rezultă că dreptele $x=\pm 1$ şi $y=x$ sînt asimptote ale graficului f. Derivata I are expresia $f'(x)=\frac{x^2(x^2-3)^2}{(x^2-1)^2}$, iar ecuaţia $f'(x)=0$ are rădăcinile $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$. Pentru $x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$, avem $f'(x)>0$. Pentru $x\in(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3})$ avem $f'(x)<0$. de aceea $x=-\sqrt{3}$ este abscisa punctului de maxim şi $x=\sqrt{3}$ este abscisa punctului de minim. (Graficul funcţiei este reprezentat pe pagina următoare.)

809. Să se reprezinte grafic funcţia $f(x)=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x$.

Soluţie Avem $f(x)=2\operatorname{tg}x-\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\frac{2\operatorname{tg}^3x}{\operatorname{tg}^2x-1}$

Perioada funcţiei este π, deci studiem funcţia pe intervalul $[0,\pi]$.

$$f'(x)=\frac{2}{\cos^2x}-\frac{2}{\cos^2 2x}=\frac{2(\cos^2 2x-\cos^2x)}{\cos^2 2x\cdot\cos^2x}=\frac{2(\cos 2x+\cos x)\cdot(\cos 2x-\cos x)}{\cos^2x\cdot\cos^2 2x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \cos 2x+\cos x=0\Rightarrow 2\cos^2x+\cos x-1=0$$

$$\cos x=-1,\ \cos x=\frac{1}{2},\ \to x=180^\circ,\ x=60^\circ$$

$$\cos 2x-\cos x=0\Rightarrow \cos^2x-\cos x-1=0\Rightarrow \cos x=1,\ \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=0,$$

$x=120^\circ$

Scanned with OKEN Scanner

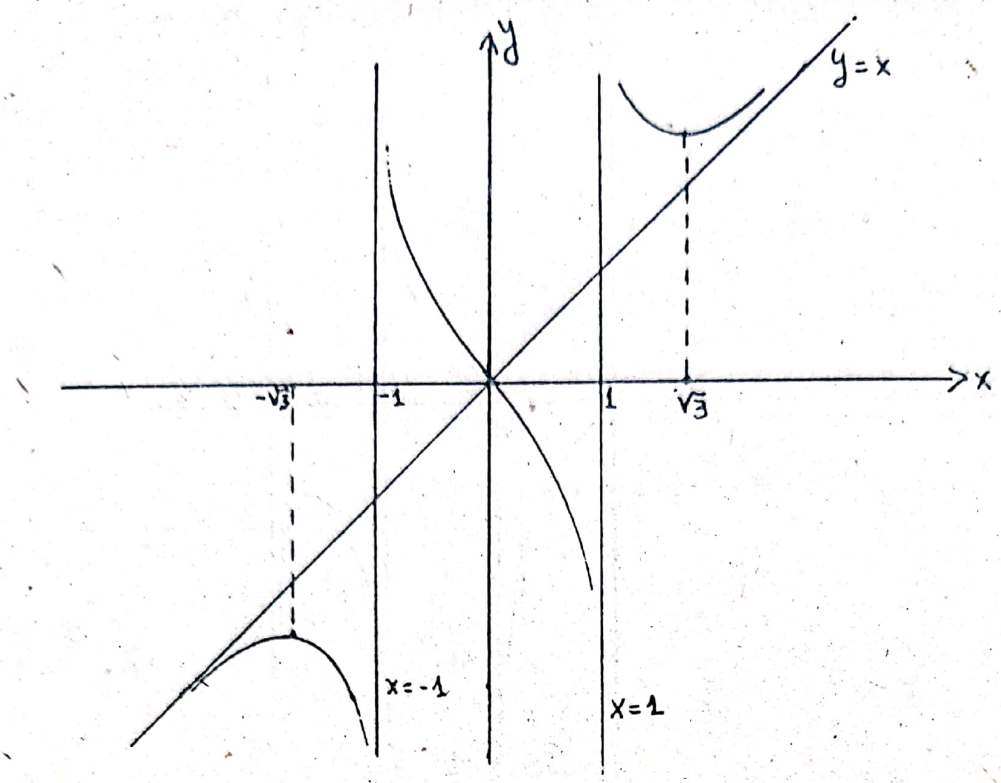


Fig. 28.

Tabloul de variaţie

x	0		45°		60°		90°		120°		135°		180°
f'(x)			—		0		+		0		—		
f(x)	0	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	0

(Graficul funcţiei este reprezentat pe pagina următoare.)

810. Se dă funcţia de variabilă reală $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}}$.

Să se reprezinte grafic funcţia dată.

Soluţie Domeniul de definiţie este dat de valorile lui x pentru care avem $-1 \le \dfrac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}} \le 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2x^2+4x+4} \le 1 \Rightarrow (x+2)^2 \ge 0$ şi deci

$f : \mathbb{R} \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$

Deci graficul are asimptotele: $y = -\dfrac{\pi}{4}$ spre $-\infty$ şi $y = \dfrac{\pi}{4}$ spre $+\infty$.

Se anulează pentru $x = 0$, $f'(x) = \dfrac{x+2}{|x+2|.(x^2+2x+2)}$. În punctul $x = -2$, f nu

Scanned with OKEN Scanner

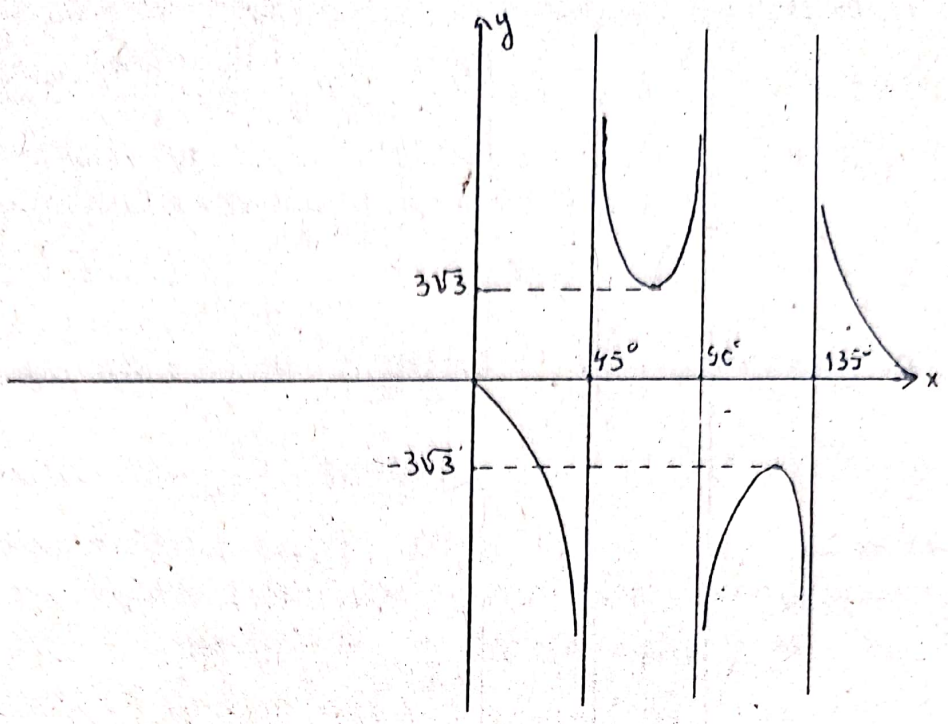


Fig. 29.

este derivabilă căci $f'(-2-0) = -\frac{1}{2}$, iar $f'(-2+0) = \frac{1}{2}$, astfel că punctul $A\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ este punct unghiular al graficului. Pentru $x < -2$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2+2x+2} < 0$ și pentru $x > -2$; $f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} > 0$. Pentru $x < -2$, $f''(x) = \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2} < 0$ și nu se anulează. Pentru $x > -2$, $f''(x) = -\frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}$, se anulează pentru $x = -1$ și pentru $-2 < x < -1$, $f''(x) > 0$, iar pentru $x > -1$, $f''(x) < 0$. Astfel că punctul $B\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$ este punct de inflexiune.

@ Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	$-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$	+	|	+	|	+	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	↘	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$-\frac{\pi}{4}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$		-	|	+	0	-	|	-	

Scanned with OKEN Scanner

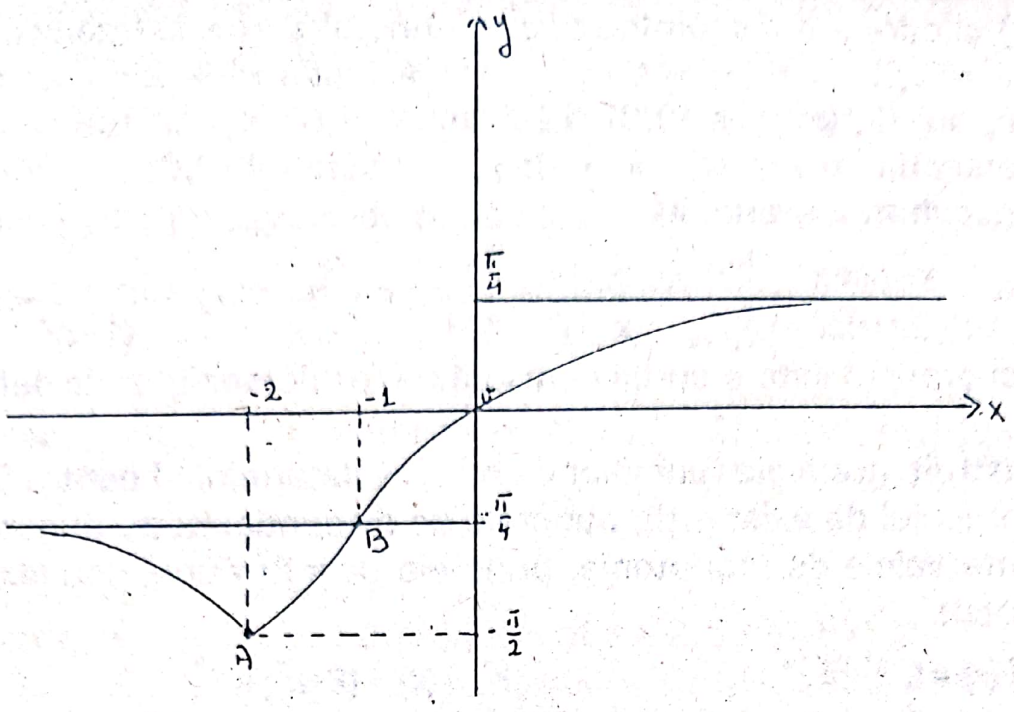


Fig. 30.

811. Se dă funcția $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1)$ definită pe domeniul ei maxim.

a) Să se determine valoarea parametrului $\alpha \in [0, 2\pi]$ pentru care panta tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 0$, are valoarea 1.

b) Să se afle panta tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 1$.

c) În cazul cînd $\alpha = \pi$, să se stabilească domeniul de definiție al funcției f(x), punctele de discontinuitate, punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate și concavitatea graficului.

Soluție Domeniul maxim de definiție este dat de valorile lui x pentru care $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 > 0$. Trinomul avînd rădăcini complexe $x = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$ este pozitiv, pe toată axa reală, deci domeniul maxim este $\mathbb{R}$.

a) Panta tangentei în x, este $f'(x) = \frac{x - \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ care în punctul $x = 0$, ne dă $f'(0) = -\frac{\cos\alpha}{1} = 1$ sau $\cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$.

b) $f'(1) = \frac{1 - \cos\alpha}{2(1 - \cos\alpha)} = \frac{1}{2}$ pentru care $\alpha \neq 2k\pi$.

c) În cazul $\alpha = \pi$ avem $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x+1)^2$ care este definită pentru

$x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ și care are discontinuitate în punctul $x = -1$. Intersecția cu axa OX: $y = 0$; $\ln (x+1)^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 1$ sau $x^2 + 2x = 0$; $x = 0$ și $x = -2$, adică punctele (0,0) și (-2,0).

Intersecția cu axa OY: $x = 0$; $y = 0$ punctul (0,0).

Concavitatea graficului

$$f'(x) = \frac{x - \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\Bigg|_{\alpha=\pi} = \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

Deci graficul este o curbă concavă pe tot domeniul ei de definiție.

812. Construiți graficele funcțiilor de mai jos determinînd pentru fiecare funcție domeniul de existență, punctele de discontinuitate, punctele de extrem, intervalele de monotonie, punctele de inflexiune, convexitatea și asimptotele:

a) $f(x) = e^{-x^2+8x-14}$;

b) $f(x) = (2+x^2)\,e^{-x^2}$;

c) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

d) $f(x) = \ln(1+e^{-x})$;

e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

f) $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x$;

g) $f(x) = \arcsin\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)$;

h) $f(x) = e^{\arcsin\sqrt{x}}$;

i) $f(x) = \ln x - \operatorname{arctg} x$;

j) $f(x) = \arcsin \ln(x^2+1)$;

k) $f(x) = x^x$;

l) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

Soluție

a) $y_{max} = e^2$ pentru $x = 4$; punctele de inflexiune sînt $I_1\left(4-\sqrt{2};\ e^{\frac{3}{2}}\right)$, $I_2\left(4+\sqrt{2},\ e^{\frac{3}{2}}\right)$; asimptota este $y = 0$.

b) $y_{max} = 2$ pentru $x = 0$; púnctele de inflexiune sînt $I_1\left(-1,\ \frac{3}{e}\right)$, $I_2\left(1,\ \frac{3}{e}\right)$.

c) $y_{max} = 0{,}74$ pentru $x \simeq 7{,}39$; $I\left(e^{\frac{8}{3}} \simeq 14{,}39\ ;\ 0{,}70\right)$; asimptotele $x = 0$ și $y = 0$.

d) Asimptotele sînt $y = 0$ pentru $x \to +\infty$ și $y = -x$ pentru $x \to -\infty$.

e) Funcția este periodică, impară, de perioadă 2π; pe segmentul $[0, 2\pi]$ $y_{max} = 1$ pentru $x = 0$; $y_{min} = 0{,}71$ pentru $x = \frac{\pi}{4}$; $y_{max} = 1$ pentru $x = \frac{\pi}{2}$; $y_{min} = -1$ pentru $x = \pi$; $y_{max} = -0{,}71$ pentru $x = \frac{5}{4}\pi$; $y_{min} = -1$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $x = \frac{3}{2}\pi$; $y_{max} = 1$ pentru $x = 2\pi$; punctele de inflexiune sînt $I_1(0,36;0,86)$; $I_2(1,21;0,86)$; $I_3(2,36;0)$; $I_4(3,51;-0,86)$; $I_5(4,35;-0,86)$; $I_6(5,5;0)$.

f) Funcția este periodică, de perioadă 2π. Pe segmentul $[0, \pi]$, $y_{max} = 1$ pentru $x = 0$; $y_{max} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$ pentru $x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $y_{min} = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$ pentru $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; $y_{min} = -1$ pentru $x = \pi$; $I_1\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $I_2\left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}, \frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$, $I_3\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right), -\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$.

g) Funcția este pară. Extremitățile sînt $A_1(2,83;-1,57)$ și $A_2(-2,83;-1,57)$; $y_{max} = 1,57$ pentru $x = 0$; $I_1(1,54;-0,34)$ și $I_2(-1,54;-0,34)$.

h) Extremitățile sînt $A(0,1)$ și $B(1;4,81)$, $I(0,28;1,74)$.

i) Domeniul de existență: $(0, +\infty)$; funcția este monoton crescătoare; asimptota este $x = 0$.

j) Punctele de extrem sînt $A_1(1,31;1,57)$ și $A_2(-1,31;1,57)$; $y_{min} = 0$ pentru $x = 0$.

k) $y_{min} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0,69$ pentru $x = \frac{1}{e} \approx 0,37$; $y \to 1$ pentru $x \to 0^+$.

e) Punct de extrem $A(0^+, 0)$; $y_{max} = e^{\frac{1}{e}} \approx 1,44$ pentru $x = e \simeq 2,72$.

Asimptota este $y = 1$; punctele de inflexiune sînt $I_1(0,58;0,12)$ și $I_2(4,35;1,40)$.

813. Reprezentați grafic funcțiile următoare:

a) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$; b) $f(x) = \frac{10}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$;

c) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}$; d) $f(x) = \ln(1 - 2\cos x)$;

e) $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1 + x^2}$; f) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$;

Soluție

a) $x \in \mathbb{R}$; max: $\left(2, \sqrt[3]{4}\right)$, min: $(0,0)$; asimptotă: $y = -x + 1$

b) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$; $f(0^-) = 10$; $f(0^+) = 0$; asimptotă: $y = 5$

Scanned with OKEN Scanner

c) $x \in [0,2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; max: (0,1), $(2\pi,1)$; min: $(\pi,-1)$; asimptote: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$

d) $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{3}+0\right) = f\left(\frac{5\pi}{3}-0\right) = -\infty$; max: $(\pi, \ln 3)$, asimptote: $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$.

e) $x \in \mathbb{R}$; $\min\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$; $\max\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

f) $x \in \mathbb{R}$; $\max\left(-1, \frac{\pi}{2}-1\right)$; $\min\left(1, 1-\frac{\pi}{2}\right)$, infl(0,0); asimptote: $y = x+\pi$ ramura spre $-\infty$ și $y = x-\pi$ ramura spre $+\infty$.

814. Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = \sqrt{x+4-4\sqrt{x}} - \sqrt{x+9-6\sqrt{x}}$

Soluție Funcția se scrie

$$f(x) = \begin{cases} 5-2\sqrt{x}, & x \in [0,4] \\ 1, & x \in [4,9] \\ 2\sqrt{x}-5, & x \in (9,+\infty) \end{cases}$$

f strict descrescătoare pe [0,4], constantă pe [4,9] și strict descrescătoare pe $(9,+\infty)$.

815. Reprezentați grafic funcția: $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$

Soluție $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. (Graficul pe pagina următoare.)

816. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$ pentru $x \in [0,9]$. (Graficul pe pagina următoare.)

817. Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

a) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$;

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$;

c) $f(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1+x}$;

d) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;

e) $f(x) = \arcsin(2x^2-1)$;

f) $f(x) = 3^x - x^3$.

Scanned with OKEN Scanner

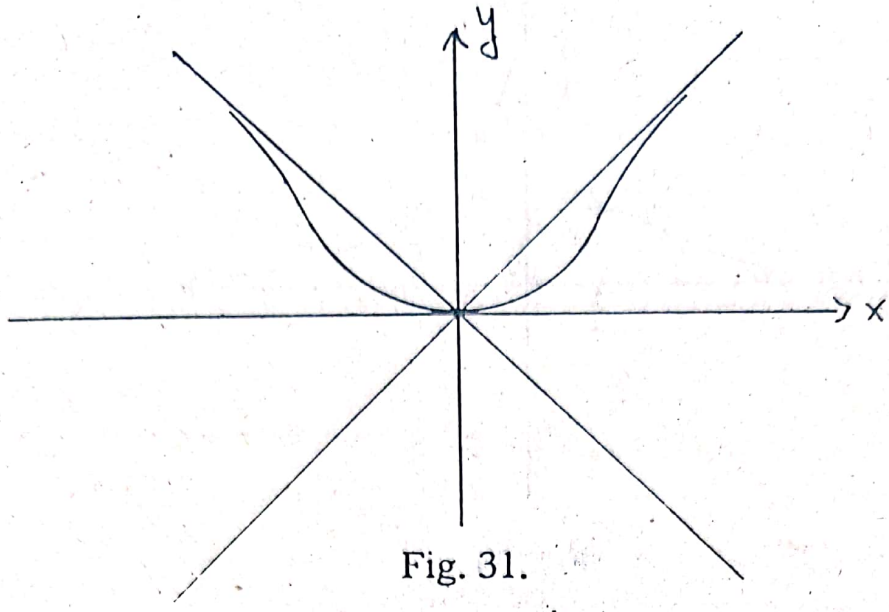


Fig. 31.

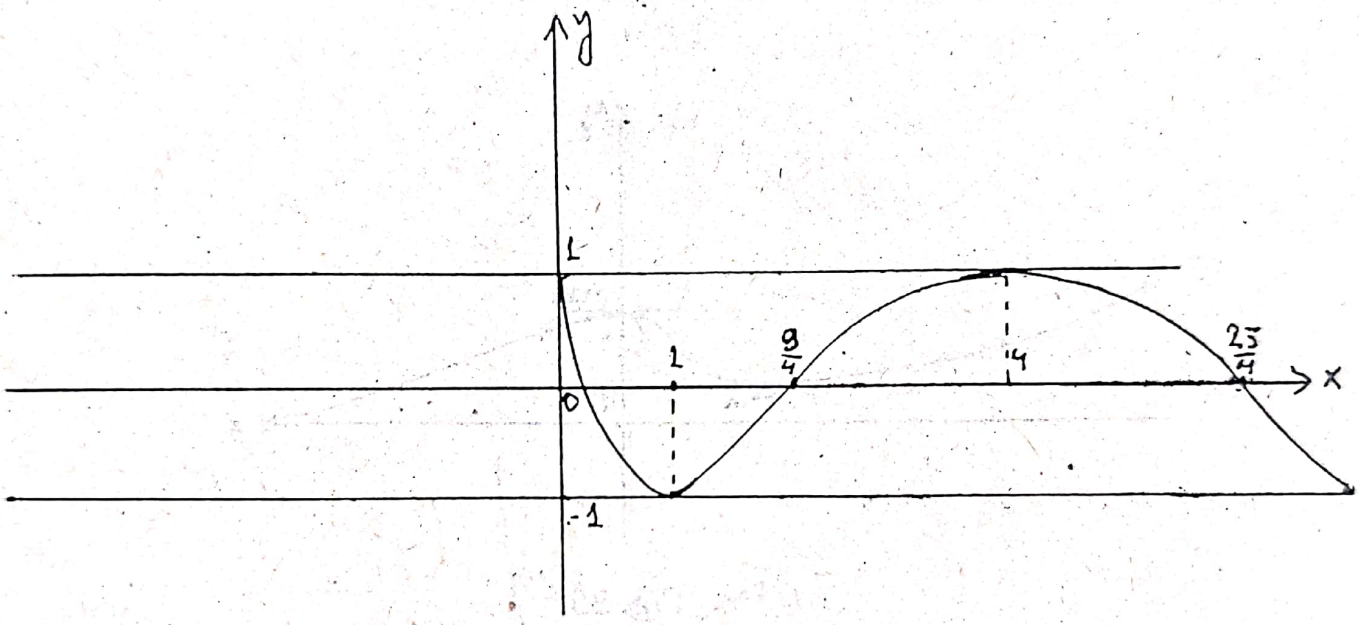


Fig. 32.

Soluție

a)

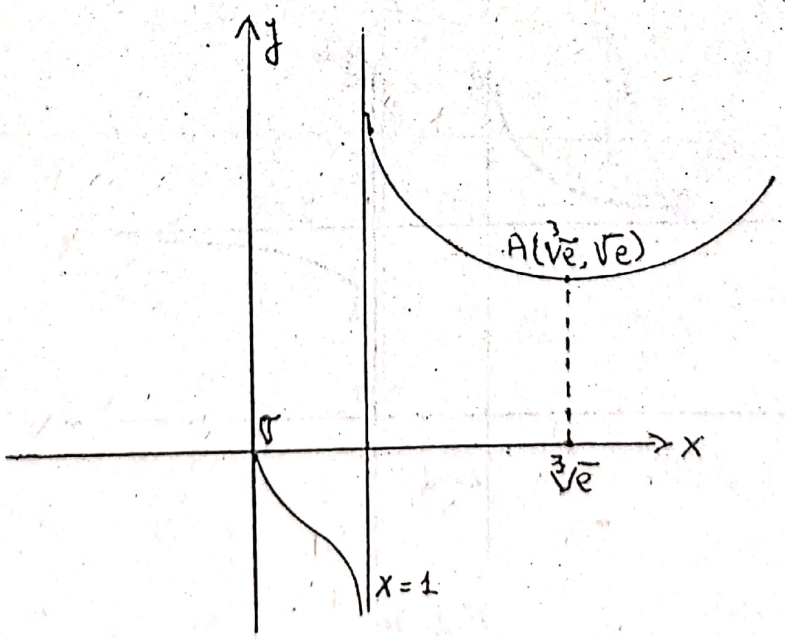


Fig. 33.

Scanned with OKEN Scanner

b)

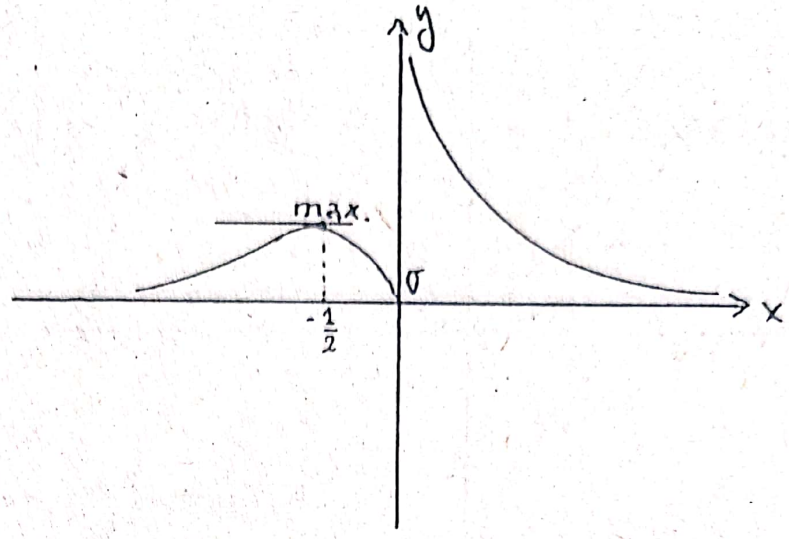


Fig. 34.

c)

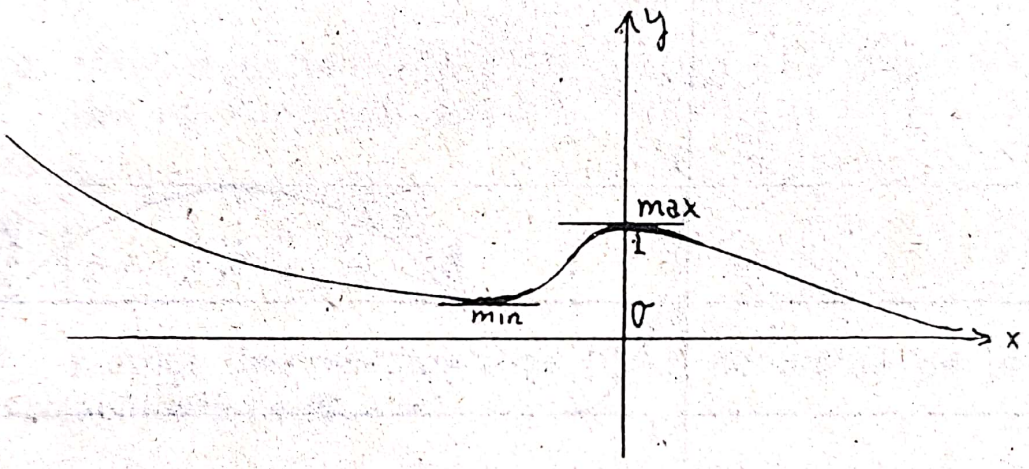


Fig. 35.

d)

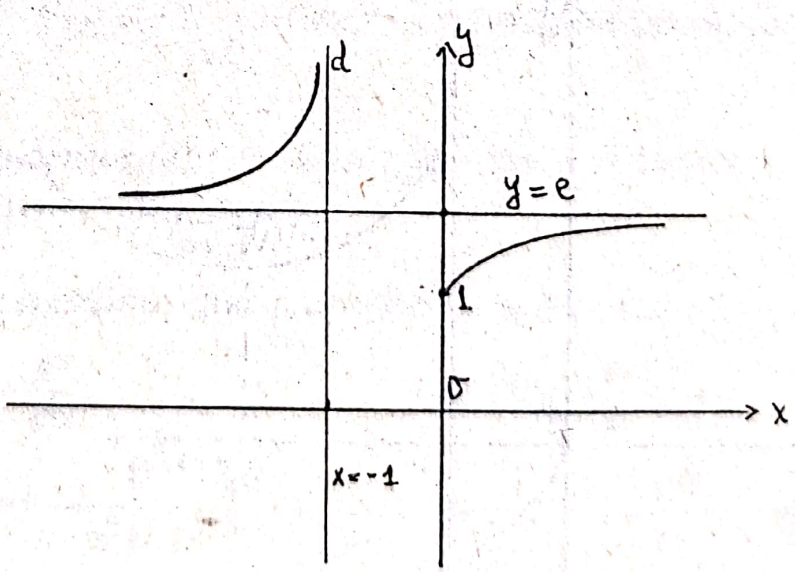


Fig. 36.

Scanned with OKEN Scanner

e)

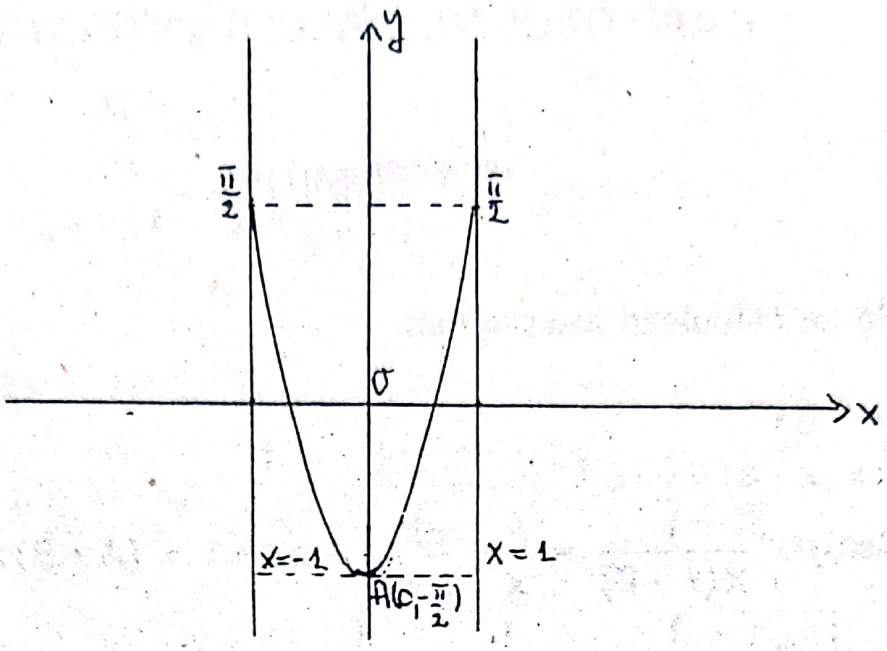


Fig. 37.

f)

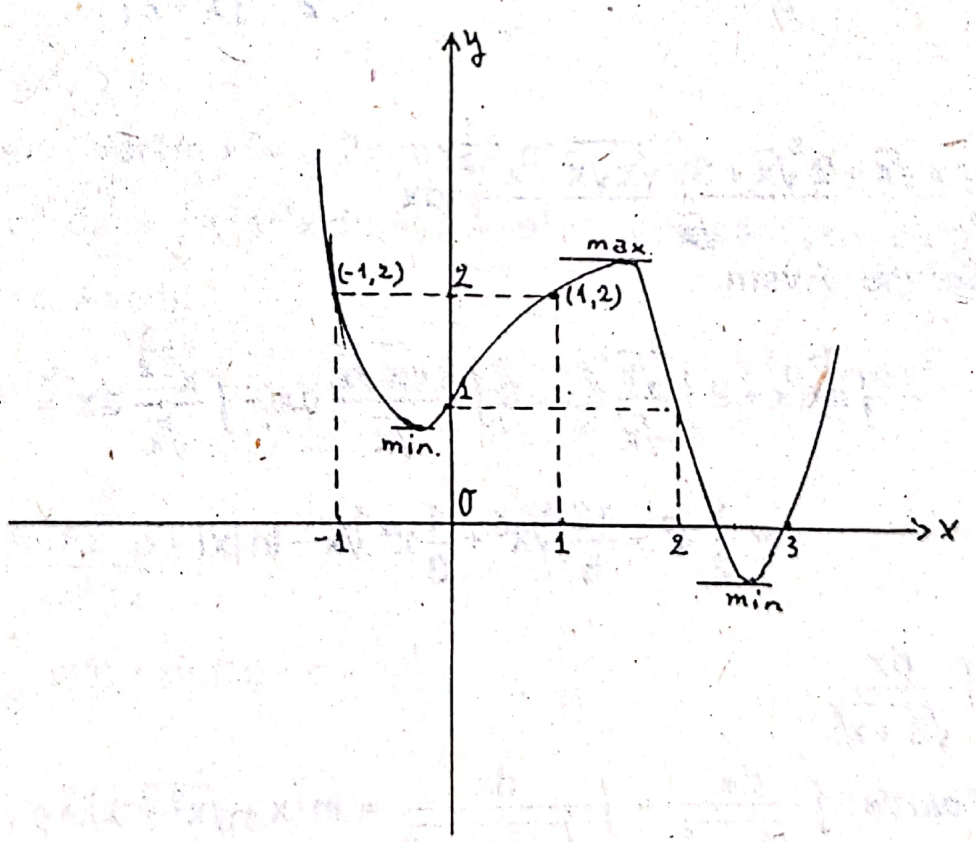


Fig. 38.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI. CALCUL INTEGRAL

VI.1. PRIMITIVE

Să se calculeze integralele:

818. $\int \frac{dx}{x(x+2)}$

Soluție $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow ox+1 = (A+B)x+2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ și $B = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}$, deci

$$\int \frac{dx}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln|x| - \ln|x+2|] + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + c$$

819. $\int \frac{x\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 3x\sqrt{x\sqrt{x}} - x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} dx$

Soluție Avem

$$\int x\,dx + 2\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx + 3\int \frac{x\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{4}{3}x^2\sqrt[4]{x} - \ln|x| + c$$

820. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

Soluție $\int \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right) + c$

Scanned with OKEN Scanner

821. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Soluție $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(x^2)+c$

822. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$

Soluție $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{5-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}}+c$

823. $\int \frac{dx}{x^2-8x+7}$

Soluție

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+7} = \int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4-3}{x-4+3}\right|+c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right|+c$$

824. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

Soluție Notăm $x^2=t$; $2x\cdot dx = dt$.

$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int x^2 e^{x^2} x\,dx = \int \frac{1}{2} t e^t\,dt$. Integrăm prin părți notînd $g'=e^t$ și $f=t$. Avem:

$$\frac{1}{2}\int t e^t\,dt = \frac{te^t}{2} - \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{te^t}{2} - \frac{e^t}{2} + c = \frac{x^2e^{x^2} - ex^2}{2} + c$$

825. $\int \frac{\sin 6x}{4+\sin^2 3x}\,dx$

R. $\frac{1}{3}\ln(4+\sin 3x)+c$

826. $\int \cos^2\left(\frac{\Pi}{6} - \frac{2x}{3}\right)dx$

R. $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\sin\frac{\Pi-4x}{3}+c$

Scanned with OKEN Scanner

827. $\int \frac{1+\sin x}{\sin x\,(1+\cos x)}\,dx$

R. Se face substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ şi se obţine

$$I = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$

828. $\int \frac{dx}{\cos^2 x - \cos^2 a}$ unde $a \neq \frac{k\Pi}{2}$, $k \in Z$.

Soluţie Se face substituţia $\operatorname{tg} x = t$, de unde $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$ şi integrala de calculat devine:

$$I = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{\cos^2 a}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1 - \cos^2 a\,(1+t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sin^2 a - \cos^2 a \cdot t^2} = \frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{1}{2\operatorname{tg} a}\left[\int \frac{dt}{\operatorname{tg} a + t} + \int \frac{dt}{\operatorname{tg} a - t}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sin 2a}\left[\ln|t + \operatorname{tg} a| - \ln|t - \operatorname{tg} a|\right] + c = \frac{1}{\sin 2a}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\sin(x-a)}\right| + c$$

829. $\int \frac{dx}{x(x+r)(x+2r)\ldots[x+(n-1)r]}$, $r \in \mathbb{R}$.

Soluţie

$$\frac{1}{x(x+r)(x+2r)\ldots[x+(n-1)r]} =$$

$$= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+r} + \ldots + \frac{A_k}{x+(k-1)r} + \ldots + \frac{A_n}{x+(n-1)r}$$

Înmulţim ambii membri ai acestei egalităţi cu $x+(k-1)r$ şi făcînd apoi $x = -r(k-1)$, vom obţine:

$$A_k = \frac{1}{[-(k-1)r][-(k-2)r]\ldots(-r)\cdot(r)\ldots[(n-k)r]} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,(n-k)!\,r^{n-1}} = (-1)^{k-1}\cdot\frac{k\cdot C_n^k}{n!\,r^{n-1}}$$

deci $\frac{1}{x(x+r)(x+2r)\ldots[x+(n-1)r]} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{k\cdot C_n^k}{n!\,r^{n-1}}\cdot\frac{1}{x+(k-1)r}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă:

$$I = \frac{1}{n!\,r^{n-1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot C_n^k \cdot \int \frac{dx}{x+(k-1)r} =$$

$$= \frac{1}{n!\,r^{n-1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot (k \cdot C_n^k) \cdot \ln|x+(k-1)r| + c$$

830. $\int \frac{2x^2+3x+9}{x^2(x^2+3x+3)}\,dx$

Soluţie Descompunem în fracţii raţionale simple şi avem:

$$I = 3\int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x+5}{x^2+3x+3}\,dx =$$

$$-\frac{3}{2} - 2\ln|x| + \ln(x^2+3x+3) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{3}} + c$$

831. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x\,dx$

Soluţie $I = \int \frac{1}{1+\cos x} e^x\,dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x} e^x\,dx.$

Integrînd prin părţi a doua integrală, obţinem:

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x} e^x\,dx = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} d(e^x) = \frac{\sin x}{1+\cos x} e^x - \int \frac{1}{1+\cos x} e^x\,dx$$

Deci $I = \frac{\sin x}{1+\cos x} e^x + c.$

832. $\int \ln(x^2+x+1)\,dx$

Soluţie Notăm $u = \ln(x^2+x+1)$; $dv = dx$.

Atunci $du = \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ şi $v = x$. Integrala devine:

$I = x\ln(x^2+x+1) - \int \frac{2x^2+x}{x^2+x+1}\,dx$. Avem în continuare:

$$\int \frac{2x^2+x}{x^2+x+1}\,dx = 2\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= 2x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $I = (x+\frac{1}{2})\ln(x^2+x+1) - 2x + \sqrt{3}\,\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$

833. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Soluție Integrala $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1)^{\frac{1}{3}}\,dx$ este o integrală binomă cu $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$ și $\gamma = \frac{1}{3}$,

$\frac{\alpha+1}{\beta} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in Z$. Facem substituția $1+x^{\frac{1}{4}} = t^3$ și obținem

$x = (t^3-1)^4$, $dx = 12t^2(t^3-1)^3dt$.

Deci:

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1)^{\frac{1}{3}}\,dx = 12\int \frac{t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}\,dt =$$

$$= 12\int (t^6-t^3)\,dt = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + c$$

unde $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$.

834. $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

R. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$

835. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

R. $-2\sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2}$

836. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$

Scanned with OKEN Scanner

R. $\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{3}$, unde $t=\sqrt[3]{1+x^5}$.

837. $\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx$

Soluție $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

Punem $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sht}$ de unde $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cht}\,dt$.

$$I=\int(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sht}-\frac{1}{2})\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cht}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cht}\,dt=\frac{3\sqrt{3}}{8}\int\operatorname{sht}\operatorname{ch}^2t\,dt-$$

$$-\frac{3}{8}\int\operatorname{ch}^2t\,dt=\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\operatorname{ch}^3t}{3}-\frac{3}{8}(\frac{1}{2}\operatorname{sht}\operatorname{cht}+\frac{1}{2}t)+c$$

Deoarece $\operatorname{sht}=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$, $\operatorname{cht}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}$ și

$t=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\ln\frac{2}{3}$.

Avem:

$$I=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{16}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+c$$

838. $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

R. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$

839. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$

R. $2\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$

840. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

R. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$

Scanned with OKEN Scanner

841. $\int e^x \sin 2x\, dx$

Soluţie Se calculează utilizînd metoda de integrare prin părţi de două ori.

$$I = \frac{e^x(\sin 2x - 2\cos 2x)}{5} + c$$

842. Să se găsească o formulă de recurenţă pentru integrala $I_m = \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $m \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$.

Soluţie Notăm $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Avem $y' = \frac{2a+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Derivînd expresia $x^{m-1} \cdot y$, obţinem:

$$(x^{m-1}\cdot y)' = (m-1)x^{m-2}\cdot y + x^{m-1}\cdot y' = (m-1)x^{m-2}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+ x^{m-1}\cdot\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2+bx+c) + x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= ma\cdot\frac{x^m}{y} + (m-\frac{1}{2})b\cdot\frac{x^{m-1}}{y} + (m-1)c\cdot\frac{x^{m-2}}{y}$$

Deci, în final:

$$(x^{m-1}\cdot y)' = ma\cdot\frac{x^m}{y} + (m-\frac{1}{2})b\cdot\frac{x^{m-1}}{y} + (m-1)c\cdot\frac{x^{m-2}}{y}.$$

Integrînd expresia de mai sus, obţinem:

$$x^{m-1}\cdot y = ma\,I_m + (m-\frac{1}{2})b\,I_{m-1} + (m-1)c\,I_{m-2},$$

de unde: $I_m = \frac{x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{ma} - \frac{(m-1)c}{ma}I_{m-2} - \frac{(2m-1)b}{2ma}I_{m-1}$.

Arătaţi că următoarele egalităţi sînt adevărate:

843. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + c$

Scanned with OKEN Scanner

844. $\int x^6 e^{-x^7} dx = -\frac{1}{7} e^{-x^7} + c$

845. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx = 2\sqrt{1+\sin^2 x} + c$

846. $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + c$

847. $\int \frac{3^{\operatorname{th} x}}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^{\operatorname{th} x} + c$

848. $\int \left[\cos\left(2x - \frac{\Pi}{4}\right)\right]^{-2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\Pi}{4}\right) + c$

849. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx = e^x + \operatorname{tg} x + c$

Să se arate că următoarele funcţii au primitive pe R

850. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln[1+\ln(2-x)]}{x-1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ -1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$

Soluţie $f(-1) = 1$;

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln[1+\ln(2-x)]}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln[1+\ln(2-x)]}{\ln(2-x)} \cdot \frac{\ln(2-x)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln[1+\ln(2-x)]}{\ln(2-x)} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{\ln[1+(1-x)]}{x-1} = -1$$

Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are primitive.

Scanned with OKEN Scanner

851. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}}{x+2}, & \text{dacă } x \in (2,3) \\ \dfrac{x+3}{6}, & \text{dacă } x \in [3,4] \end{cases}$

R. Funcția f este continuă pe (2,4], deci admite primitive.

852. $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

R. Se va utiliza faptul că o primitivă a lui $\sin\frac{1}{x}$ pe intervalul $(0,+\infty)$ sau $(-\infty,0)$ este egală cu $x^2\cos\frac{1}{x} - 2\int x\cos\frac{1}{x}\,dx$.

Să se arate că următoarele funcții nu au primitive pe $\mathbb{R}$:

853. $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & x < 0 \\ \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \end{cases}$

Soluție Avem $F/_{(-\infty,0)} = (x-1)[\ln(1-x)+1] + C_1$

$F/_{[0,+\infty)} = -\ln(\cos x) + C_2$

Ținînd seama că F trebuie să fie continuă în $x_0 = 0$, rezultă: $C_2 = C_1 - 1$, deci

$$F(x) = \begin{cases} (x-1)[\ln(1-x)+1] + C_1, & x < 0 \\ -\ln(\cos x) - 1 + C_2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Funcția F nu este derivabilă în $x = 0$ deoarece $F_s'(0) = 2$ și $F_d'(0) = 0$, deci f nu admite primitive.

854. $f(x) = \begin{cases} e^x + x - 1, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}, & x > 1 \end{cases}$

Soluție

Fie funcțiile: $f_1:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$, $f_1(x) = e^x + x - 1$

$f_2:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

Scanned with OKEN Scanner

Ele admit ca primitive pe $F_1(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - x$ și $F_2(x) = 2\sqrt{x-1}$, deci dacă f admite o primitivă atunci $F/_{(-\infty,1)} = F_1 + C_1$, $F/_{(1,+\infty)} = F_2 + C_2$.

F trebuie să fie continuă în $x = 1$, deci

$F(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F(x) = e - \frac{1}{2} + C_1$, $F(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} F(x) = C_2$, de unde

$$C_2 = C_1 + e - \frac{1}{2} = k \text{ și } F(x) = \begin{cases} e^x + \frac{x^2}{2} - x - e + \frac{1}{2} + k, & x \le 1 \\ 2\sqrt{x-1} + k, & x > 1 \end{cases}$$

Studiem derivabilitatea funcției F în $x = 1$. Avem:

$F'_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{e^x + \frac{x^2}{2} - x - e + \frac{1}{2}}{x-1} = e$, $F'_d(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1} = +\infty$. Rezultă că F nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci nu are primitive.

855. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in Q \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$

Soluție Observăm că imaginea intervalului (1,2) prin funcția f nu este un interval. Avem $f(1)=1$, $f(2)=2$ și $1<\sqrt{2}<2$, iar $\sqrt{2} \neq f(x)$, $\forall$ $x \in (1,2)$. Deci f nu admite primitive.

Calculați următoarele integrale, folosind metoda integrării prin părți:

856. $\int \ln^2 x \, dx$, $x \in (0, +\infty)$.

R. $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$

857. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

R. $\frac{(1+x)\, e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + c$.

858. $\int \sin(\ln x) \, dx$, $x \in (0, +\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

R. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c.$

859. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx, \quad x \in (-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2})$

R. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$

Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii trigonometrice:

860. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$

R. $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c$

861. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

R. $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln|\operatorname{tg} x| + c$

862. $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$

R. $\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} + c.$

863. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

Soluţie Împărţind expresia prin $\cos^2 x$, obţinem:

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{3+\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{4+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{(\operatorname{tg} x)'}{4+\operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + c$$

864. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[5]{\operatorname{th}^2 x}}, \quad x \neq 0.$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie Facem substituţia $\text{th}\,x = t$, $dt = \frac{dx}{\text{ch}^2 x}$, şi obţinem

$\int \frac{dt}{\sqrt[5]{t^2}} = \frac{5}{3}\sqrt[5]{t^3} + c$, de unde $I = \frac{5}{3}\sqrt[5]{\text{th}^3 x} + c$.

865. $\int \cos^n x \sin^3 x\, dx$, $x \in [0, 2\pi)$, $n \neq -1$, $n \neq -3$.

Soluţie Facem substituţia $\cos x = t$, $dx = -\sin x \cdot dt$ şi obţinem

$-\int t^n (1 - t^2)\, dt = \frac{t^{n+3}}{n+3} - \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$, de unde:

$$I = \frac{\cos^{n+3} x}{n+3} - \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + c.$$

866. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\, dx$, $x \neq k\pi$.

Soluţie Notăm $\sin x = t$, $\cos x \cdot dx = dt$ şi avem

$I = -\frac{1}{\sin^3 x} \cdot \frac{2}{\sin x} + \sin x + c$.

Utilizînd prima metodă de schimbare de variabilă, să se calculeze:

867. $\int \frac{e^{\text{arctg}\, x}}{1 + x^2}\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie Fie $\varphi(x) = \text{arctg}\, x$, derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ continuă pe $\mathbb{R}$. Funcţia $f(x) = e^x$ este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $F(x) = e^x$ este o primitivă a sa. Avem:

$$\int \frac{e^{\text{arctg}\, x}}{1 + x^2}\, dx = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + c = e^{\text{arctg}\, x} + c$$

868. $\int \frac{1 + e^{-x}}{x e^{-x} + 1}\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie $I = \mathbb{R}$, $J = (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(x) = x + e^x$. O primitivă a funcţiei f este $F(x) = \ln x$. Avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\int \frac{1+e^{-x}}{xe^{-x}+1}\,dx = \int \frac{e^x+1}{x+e^x}\,dx = \ln(x+e^x)+c$$

869. $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx$, $x\in(-\infty,0)$.

Soluție $I = \mathbb{R}$, $J = (-1,1)$, $\varphi: I\to J$, $\varphi(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$ și $f: J\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Avem $\varphi'(x) = 3^x$, iar o primitivă a lui f este $F(x) = \arcsin x$, deci:

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{(3^x)'}{\sqrt{1-(3^x)^2}}\,dx = \frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x + c$$

Utilizînd a doua metodă de schimbare de variabilă, să se calculeze:

870. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$, $x\in(0,1)$.

Soluție Fie $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ este continuă. Facem substituția $\sqrt{x} = \sin t$, de unde $\varphi:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to(0,1)$, $\varphi(t) = \sin^2 t$ este derivabilă cu derivata nenulă pe $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\varphi^{-1}(t) = \arcsin\sqrt{t}$.

Funcția $h(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = 2t\sin t$ are primitiva $H(t) = 2(\sin t - t\cos t)$, iar $H(\varphi^{-1}(t)) = 2\sqrt{t} - 2\sqrt{1-t}\cdot\arcsin\sqrt{t}$, deci

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x} + c$$

871. $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$, $x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=\dfrac{t^2-1}{2t}$.

Din $\sqrt{1+x^2}=t-x$ rezultă $x=\dfrac{t^2-1}{2t}$, deci $\varphi(t)=\dfrac{t^2-1}{2t}$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$. Avem $\varphi'(t)=\dfrac{t^2+1}{2t}$, $\varphi^{-1}(t)=t+\sqrt{1+t^2}$, $h(t)=\dfrac{t^2+1}{2t^2}\ln^2 t$. Pentru a determina o primitivă a funcției h vom calcula $\dfrac{1}{2}\int\dfrac{t^2+1}{t^2}\ln^2 t\,dt=\dfrac{1}{2}\int\ln^2 t\,dt+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\ln^2 t}{t^2}\,dt$. Calculăm cele două integrale utilizînd formula de integrare prin părți. Astfel:

$$I_1=\int\ln^2 t\,dt=t\ln^2 t-2\int\ln t\,dt=t\ln^2 t-2t(\ln t-t),$$

$$I_2=\int\frac{\ln^2 t}{t^2}\,dt=-\frac{\ln^2 t}{t}+2\int\frac{\ln t}{t}\,dt=-\frac{\ln^2 t}{t}-2\frac{\ln t}{t}-\frac{2}{t}.$$

Deci $H(t)=\dfrac{t^2-1}{2t}\ln^2 t-\dfrac{t^2+1}{t}\ln t+\dfrac{t^2-1}{t}$, de unde rezultă:

$$\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+c$$

872. $\displaystyle\int\frac{2^x}{1-4^x}\,dx$, $x\in(0,+\infty)$.

Soluție $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{\ln 2}$.

Din $2^x=t$ rezultă $x=\dfrac{\ln t}{\ln 2}$, de aici $\varphi(t)$ și $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2^x}{1-4^x}$. Avem $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}$, $\varphi^{-1}(t)=2^t$ și $h(t)=\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\dfrac{1}{1-t^2}$ cu primitiva $H(t)=\dfrac{1}{2\ln 2}\ln\left|\dfrac{1-t}{1+t}\right|$, deci $\displaystyle\int\frac{2^x}{1-4^x}\,dx=\frac{1}{2\ln 2}\ln\left|\frac{1-2^x}{1+2^x}\right|+c$.

Calculați următoarele integrale cu ajutorul relațiilor de recurență:

873. $\displaystyle I_n=\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^n}$, $a\neq 0$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1}$$

unde primitiva integralei $\int\frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^n}$ a fost calculată prin părți.

874. $I_n = \int x^n\cdot e^{-x}\,dx$

R. $I_n = -x^n\cdot e^{-x} + n\,I_{n-1}$.

875. $I_n = \int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$, $a \neq 0$

Soluție Fie $I_{n-1} = \int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} = u\\ dx = dv\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-\dfrac{2(n-1)x}{(a^2+x^2)^n}\,dx = du\\ x = v\end{cases}$$

$$I_{n-1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - 2a^2(n-1)\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n} \rightarrow$$

$$\rightarrow I_{n-1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\,I_{n-1} - 2a^2(n-1)\,I_n$$

$$I_n = \frac{x}{2(a^2+x^2)^{n-1}\cdot a^2(n-1)} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$I_1 = \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze integralele:

876. $\int \frac{dx}{x \ln x}$

Soluție $\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \int \frac{(\ln x)'\,dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + c.$

877. $\int [(3x^2+2)\, e^{x^3+2x-1}]\,dx$

R. $e^{x^3+2x-1} + c.$

878. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

R. $\int (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}} \cdot d(\operatorname{tg} x) = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + c.$

879. $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}$

R. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ I = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}\right| + c.$

880. $\int (\ln x)^3\,dx$

R. $x(\ln x)^3 - 3(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x) + c.$

VI.2. INTEGRALA ÎN SENSUL LUI RIEMANN. APLICAȚII PRACTICE ALE INTEGRALEI

Să se calculeze următoarele integrale definite:

881. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot \sin x\,dx$, unde $f(x) = \max[\sin x, \sin^3 x]$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \sin^3 x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{16}$$

unde $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{x}$; $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{4}$.

882. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{1 + \sqrt{2}\cos x}$.

Soluție Facem substituția $\cos x = t \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t(1 + t\sqrt{2})} = \ln\sqrt{2} + \sqrt{2}\ln 2(\sqrt{2} - 1).$$

883. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx$

Soluție

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x \, dx$$

În integrala $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx$, făcînd substituția $\operatorname{tg} x = t$, obținem formula de recurență:

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}, \text{ deci } I_{n-1} = \frac{1}{2n-3} - I_{n-2}, \ldots,$$

$$I_2 = \frac{1}{3} - I_1 = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2n - (2k-1)} + (-1)^n \frac{\pi}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

884. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^4}\,dx$

Soluție Aplicăm formula de integrare prin părți notînd $f(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x^4}$;

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^4}\,dx = -\frac{\ln x}{x^3}\Big|_1^e + \frac{1}{3}\int_1^e \frac{dx}{x^4} = -\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{9x^3}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{4}{e^3}\right)$$

885. $\int_{\sqrt{e}}^{e^2} |\ln x - 1|\,dx$

Soluție $|\ln x - 1| = \begin{cases} 1 - \ln x, & 0 < x \le e \\ \ln x - 1, & x > e \end{cases}$

$$\int_{\sqrt{e}}^{e^2} |\ln x - 1|\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} (1 - \ln x)\,dx + \int_e^{e^2} (\ln x - 1)\,dx = 2e - \frac{3}{2}\sqrt{e}.$$

886. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}\,dx$

Soluție $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \frac{tg^4 x + 1}{tg^6 x + 1} \cdot \frac{\cos^4 x}{\cos^6 x}$

Notăm $tgx = t$ și avem:

$$I = \int_0^1 \frac{t^4 + 1}{t^6 + 1}\,dt = \int_0^1 \frac{t^4 + 1 - t^2}{t^6 + 1}\,dt + \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{t^6 + 1} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{d(t^3)}{(t^3)^2 + 1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

887. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\,dx$

R. $4 - \pi$

888. $\int_0^a \sqrt{ax - x^2}\,dx$

R. $\frac{\pi a^2}{8}$

Scanned with OKEN Scanner

889. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$

R. Notăm $tgx = t$ și obținem $\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$

890. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

R. $\frac{1}{\ln 2}$

891. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$

R. $\frac{1}{4}$

892. $\int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

R. Notăm $\sqrt{x} = t$ și obținem $\frac{\pi}{6}$

893. $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

R. $2 - \ln\frac{9}{4}$

Să se demonstreze egalitățile următoare:

894. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$

895. $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$, $x > 0$.

Indicație: Se notează $t = \frac{1}{z}$.

Scanned with OKEN Scanner

896. $\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg}x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg}x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1$

897. $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{x}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\Pi}{4}$

898. Să se arate că funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ este integrabilă pe [0,1], dar nu este continuă. Are funcţia f primitive?

R. Funcţia f este mărginită pe [0,1] şi are un număr finit de puncte de discontinuitate pe [0,1], (x=0) deci este integrabilă pe [0,1]. Funcţia f nu admite primitive pe [0,1].

899. Să se arate că funcţia $f:[0,1]\to\{-1,1\}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ este integrabilă pe [0,1] dar nu are primitive pe acest interval.

R. Funcţia f este monotonă pe [0,1] deci integrabilă pe acest interval. Funcţia dată nu are proprietatea lui Darboux, deci nu are primitive pe intervalul [0,1].

Fără a calcula efectiv integralele, să se demonstreze inegalităţile următoare:

900. $0 \le \int_1^e \ln^3 x\,dx \le e-1$

Soluţie $f(x) = \ln^3 x$, $x\in[1,e]$; $f'(x) = 3\frac{\ln^2 x}{x} > 0$, deci $f(1) \le \ln^3 x \le f(e) \Rightarrow 0 \le \ln^3 x \le 1$, deci $0 \le \int_1^e \ln^3 x\,dx \le e-1$.

901. $\frac{\Pi}{2e} \le \int_{-\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{4}} e^{\operatorname{tg}x}\,dx \le \frac{\Pi}{2}e$

Soluţie $f(x) = e^{\operatorname{tg}x}$, $x\in[-\frac{\Pi}{4},\frac{\Pi}{4}]$; $f'(x) = \frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x} > 0$ pe $[-\frac{\Pi}{4},\frac{\Pi}{4}]$,

Scanned with OKEN Scanner

deci $f(-\frac{\pi}{4}) \le e^{\operatorname{tg}x} \le f(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{1}{e} \le e^{\operatorname{tg}x} \le e$ de unde:

$$\frac{\pi}{2e} \le \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\operatorname{tg}x}\,dx \le \frac{\pi}{2}e$$

Calculaţi limitele următoarelor şiruri cu ajutorul integralei definite:

902. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$, $k \in \mathbb{R}-\{-1\}$.

Soluţie

$$a_n = \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^k\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k$$

Rezultă că $f(x) = x^k$, deci avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} = \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}$$

903. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4}\left[1^2\sqrt[3]{1^3+n^3} + 2^2\sqrt[3]{2^3+n^3} + \ldots + n^2\sqrt[3]{n^3+n^3}\right]$

Soluţie Termenul general se mai scrie:

$$a_n = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2\sqrt[3]{k^3+n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\sqrt[3]{\left(\frac{k}{n}\right)^3+1}$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\sqrt[3]{\left(\dfrac{k}{n}\right)^3+1} = \int_0^1 x^2\sqrt[3]{x^3+1}\,dx.$

Facem substituţia $x^3 + 1 = t$ şi avem:

$$\int_0^1 x^2\sqrt[3]{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 t^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{1}{4}t^{\frac{4}{3}}\Big|_1^2 = \frac{1}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$.

904. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

Soluţie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \int_0^1 \sin(\pi n)\,dx = \dfrac{2}{\pi}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

905. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3n^2+k^2}=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^2-k^2}=\ln 3-1$.

906. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$.

907. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{2}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{2n}}\right)=\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$

908. Dacă f este o funcţie continuă, să se demonstreze că $\int_0^a f(x)\,dx\le\sqrt{a\int_0^a f^2(x)\,dx}$, unde $a\in\mathbb{R}_+$.

Aplicaţie $0\le\int_0^{\pi}\sqrt{x}\sin x\,dx\le\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}$

Soluţie Deoarece f(x) este funcţie continuă, $f^2(x)$ este funcţie continuă şi $a\int_0^a f^2(x)\,dx$ există pentru $a\ge 0$. $f^2(x)\ge 0$, deci $a\int_0^a f^2(x)\,dx\ge 0$ şi $\sqrt{a\int_0^a f^2(x)\,dx}$ există. Dacă f(x) este funcţie continuă, atunci şi $f(x)+\lambda$ este funcţie continuă, deci integrabilă, oricare ar fi $\lambda\in\mathbb{R}$. În plus, $[f(x)+\lambda]^2\ge 0$ şi deci $\int_0^a[f(x)+\lambda]^2\,dx\ge 0$.

Dar $[f(x)+\lambda]^2=f^2(x)+2\lambda f(x)+\lambda^2$ şi

$$\int_0^a[f(x)+\lambda]^2\,dx=\int_0^a[f^2(x)+2\lambda f(x)+\lambda^2]\,dx=\int_0^a f^2(x)\,dx+$$
$$+2\lambda\int_0^a f(x)\,dx+\lambda^2\int_0^a dx=\lambda^2 a+2\lambda\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f^2(x)\,dx$$

Deci $\lambda^2 a+2\lambda\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f^2(x)\,dx\ge 0$, oricare ar fi $\lambda\in\mathbb{R}$.

Trinomul de gradul doi în λ are un semn constant oricare ar fi λ, deci discriminantul $\Delta\le 0$, sau $\left(\int_0^a f(x)\,dx\right)^2-a\int_0^a f^2(x)\,dx\le 0$, sau $\int_0^a f(x)\,dx\le\sqrt{a\int_0^a f^2(x)\,dx}$.

Aplicînd aceste rezultate pentru $f(x)=\sqrt{x}\sin x$ şi $a=\pi$, avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x}\sin x\,dx \le \sqrt{\pi \int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx}$$

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{x(1-\cos 2x)}{2}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{2}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{x\cos 2x}{2}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4} \text{ și } \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2}\,dx\right] = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \frac{\cos 2x}{8}\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Deci $\int_0^{\pi} \sqrt{x}\sin x\,dx \le \sqrt{\pi \frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}$. Deoarece $\sqrt{x}\sin x \ge 0$ pentru $x \in [0,\pi]$, rezultă că: $0 \le \int_0^{\pi} \sqrt{x}\sin x\,dx \le \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}$.

Calculați ariile figurilor limitate de:

909. $y = 4x - x^2$, axa $x'ox$.

R. $\frac{32}{3}$.

910. $y = x(x-1)(x-2)$, axa $x'ox$.

R. $\frac{1}{2}$.

911. $y = \ln x$, axa $x'ox$, dreapta $x = e$.

R. 1.

912. $y = \operatorname{tg} x$, axa $x'ox$, dreapta $x = \frac{\pi}{3}$.

R. $\ln 2$.

Calculați ariile figurilor limitate de curbele:

913. $y = 2-x^3$ și $y^3 = x^2$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție $A = \int_{-1}^{1}(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}})\,dx = \frac{32}{15}$

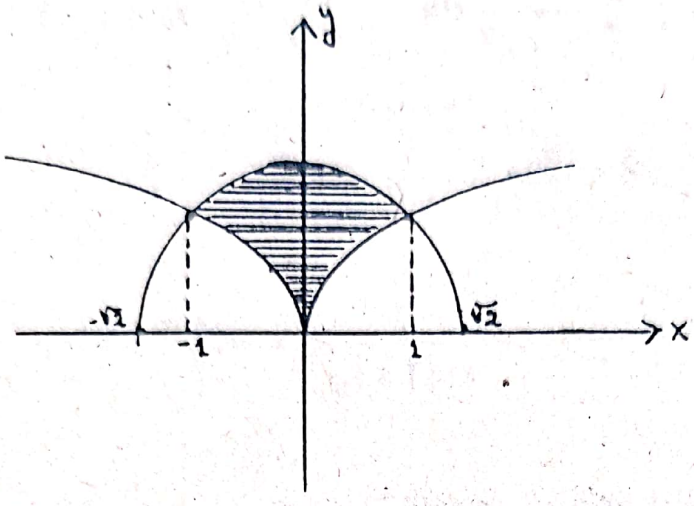


Fig. 39.

914. $y = -3x^2 + 6x - 2$ și $y = 2x^2 - 2x + 1$

Soluție $A = \int_{\frac{3}{5}}^{1}(-3x^2 + 6x - 2)\,dx - \int_{\frac{3}{5}}^{1}(2x^2 - 2x + 1)\,dx = \frac{4}{75}$

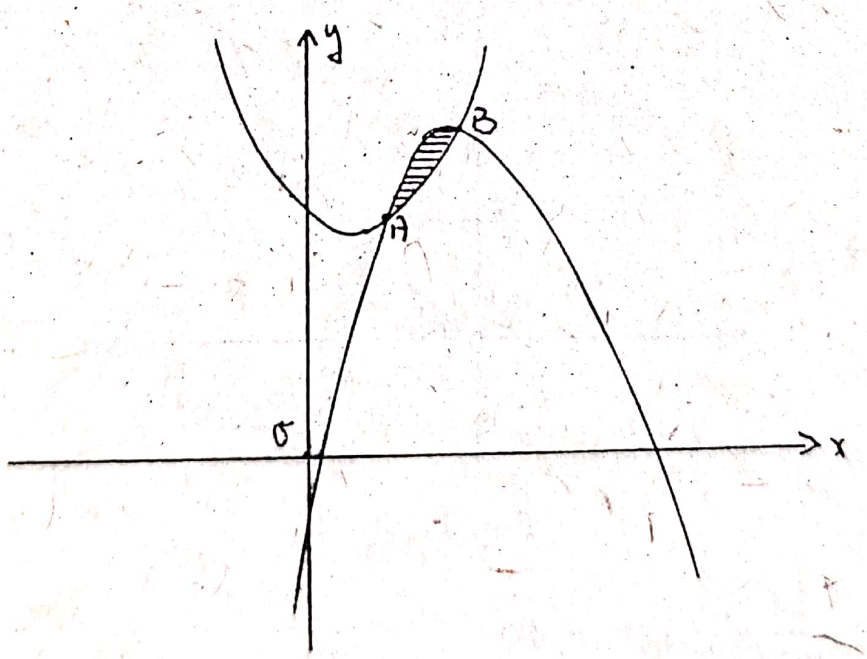


Fig. 40.

Scanned with OKEN Scanner

915. $y = \frac{1}{3+x^2}$, $y = \frac{1}{54}(x^2+6)$

Soluție $A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+x^2}\,dx - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{54}(x^2+6)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\Pi}{2} - \frac{7}{9}\right)$

916. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n})\right] = \frac{2}{3}$

917. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+2k}+\ldots+\frac{1}{n(1+k)}\right] = \ln\sqrt[k]{1+k}$

Să se calculeze aria mulțimii Γ_f dacă:

918. $f(x) = \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}$, $x \in [0, \ln 5]$.

Soluție $A = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}\,dt = 4 - \frac{\Pi}{2}$

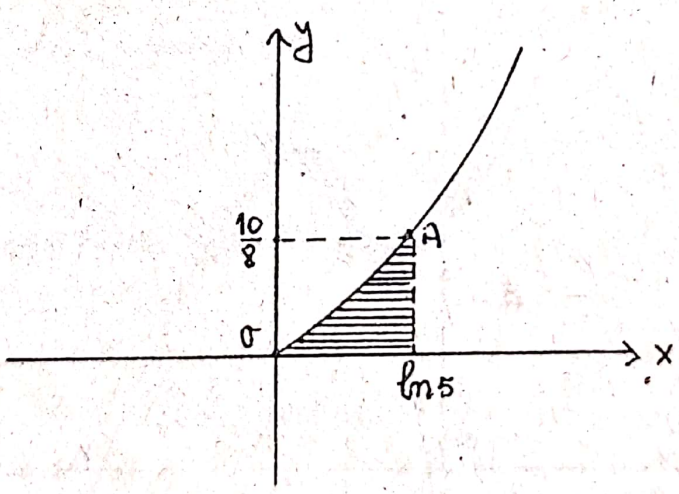


Fig. 41.

919. $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $x \in [e, e^2]$.

Soluție $A = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_e^{e^2} = \ln 2$

Scanned with OKEN Scanner

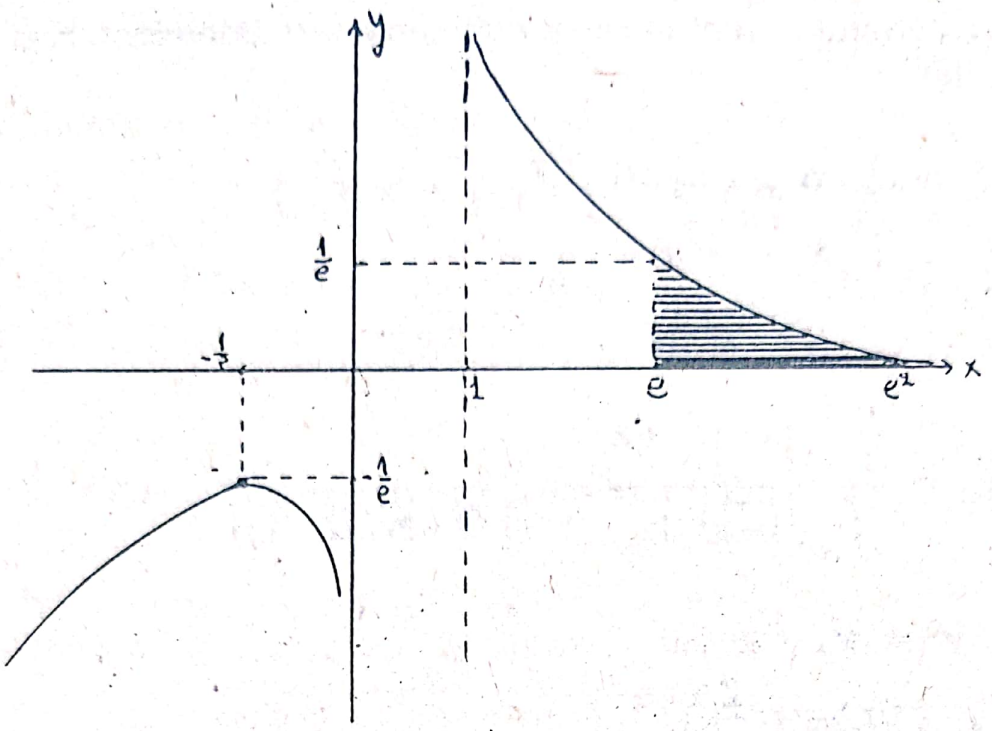


Fig. 42.

920. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in [0,1]$.

Soluție $A = \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{\Pi}{4}$.

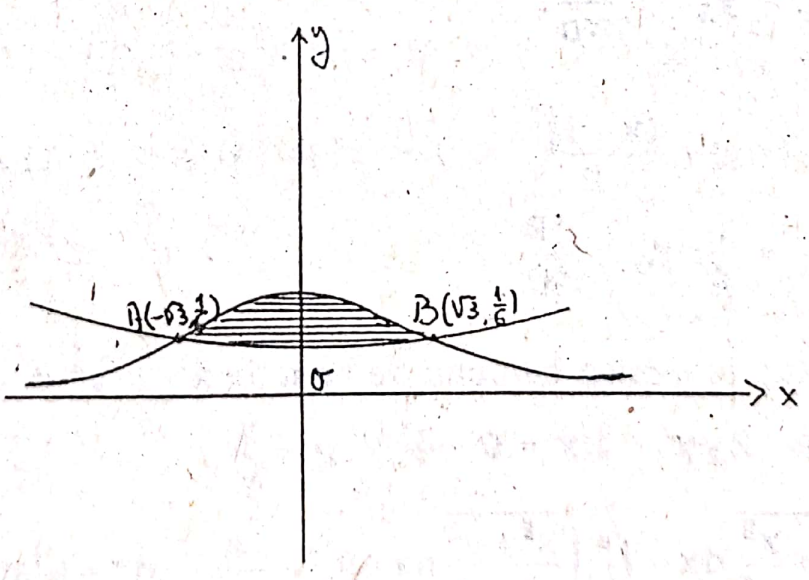


Fig. 43.

Să se determine centrele de greutate ale următoarelor plăci plane, omogene, date de:

921. $A = \{(x,y) / 0 \le y \le \sqrt{1+x^2}, -1 \le x \le 1\}$

R. $x_G = \dfrac{\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx}{\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx} = 0$

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,dx}{\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx} = \frac{8}{3\left[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)\right]}$$

922. $x^2 + y^2 = a^2$, $y \ge 0$.

R. $x_G = 0$; $y_G = \dfrac{2a}{\Pi}$.

923. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

R. $x_G = y_G = \dfrac{9}{20}$.

924. $y^2 = 2px$; $x^2 = 2py$.

R. $x_G = y_G = \dfrac{9}{10p}$.

925. $A = \{(x,y) / \dfrac{(x+1)^2}{2} \le y \le x^2+1, 0 \le x \le 1\}$

R. $x_G = \dfrac{1}{4}$; $y_G = \dfrac{19}{20}$.

926. Calculați lungimea cercului de ecuație $x^2 + y^2 = a^2$.

Soluție $2yy' + 2x = 0 \rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$

$$\frac{1}{4}s = \int_0^a \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \int_0^a \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx = \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_0^a = \frac{\Pi}{2}a$$

Deci $s = 4\,\dfrac{\Pi}{2}\,a = 2\Pi a$.

Scanned with OKEN Scanner

927. Calculaţi lungimea arcului de curbă $y = e^x$ cuprins între punctele (0,1) şi (1,e).

Soluţie $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$.

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+(e^x)^2}\,dx = \left[\frac{e^x}{2}\sqrt{1+e^{2x}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left[e\sqrt{1-e^2} - \sqrt{2} + \ln\left(e+\sqrt{1+e^2}\right)(\sqrt{2}-1)\right]$$

Să se calculeze lungimile graficelor următoarelor funcţii:

928. $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in [0, 2\sqrt{2}-1]$.

Soluţie

$$s = \int_0^{2\sqrt{2}-1} \sqrt{1+\frac{1}{(1+x)^2}}\,dx = \left[2\sqrt{(1+x)^2+1} + \right.$$

$$\left. + \ln\frac{\sqrt{(1+x^2)^2+1}-1}{\sqrt{(1+x^2)^2+1}+1}\right]_0^{2\sqrt{2}-1} = 4 + \ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

929. $f(x) = \ln(\sin x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Soluţie $s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx = \ln\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1+\sqrt{2})$

930. $f(x) = \arcsin(e^{-x})$, $x \in [0,1]$.

R. $\ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)$.

931. $\ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{a}\right)$, $x \in [a,b]$, $0 < a < b$.

R. $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1} + a - b = \ln\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a}$

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze aria suprafeţelor de rotaţie determinate de funcţiile:

932. $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Soluţie

$$A = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}}\, dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \sqrt{1 + \cos^4 x}}{\cos^3 x}\, dx =$$

$$= \pi \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2} \right]$$

933. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},\ x \in [0,a]$.

R. $\frac{\pi a^2}{2}(2 + \operatorname{sh} 2)$.

934. Calculaţi aria suprafeţei de rotaţie generate de rotaţia cercului $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ în jurul axei OX, $a < b$.

Indicaţii: $y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. Luînd ecuaţia $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$ se obţine suprafaţa exterioară a torului, iar cu ecuaţia $y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$ obţinem suprafaţa interioară a torului.

Să se determine volumele corpurilor de rotaţie determinate de funcţiile:

935. $f(x) = |x|\, e^{-|x-1|},\ x \in [1,2]$.

Soluţie $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}},\ x \in [1,2]$.

$$V = \pi \int_1^2 \frac{x^2}{e^{2(x-1)}}\, dx = \pi e^2 \int_1^2 x^2 e^{-2x}\, dx = \frac{\pi}{4e^4}(5e^2 - 13)$$

936. $f(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in [0,1]$.

Soluţie $V = \pi \int_0^1 \frac{e^{2 \operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

937. $f(x) = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$.

R. $\frac{3}{8}\pi^2$.

938. Să se calculeze volumul corpului de rotaţie cuprins între paralelele $y = 2x-x^2$, $y = 9-x^2$ cu $y > 0$ şi axa OX.

Soluţie $V = \pi\int_{-3}^{3}(9-x^2)^2\,dx - \pi\int_{0}^{2}(2x-x^2)^2\,dx = \frac{3968\pi}{15}$.

939. Căldura specifică a unui kilogram de apă variază în funcţie de temperatura t, conform legii: $f(t) = 1 + 4\cdot10^{-5}t + 9\cdot10^{-7}t^2$.

Să se determine cantitatea de căldură necesară pentru a încălzi $1\,m^3$ de apă de la 10° la 60°.

Soluţie Pentru $1\,m^3$ de apă, căldura specifică este dată de:

$$f_1(t) = 1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2;$$

$$Q = \int_a^b f(t)\,dt = \int_{10}^{60}(1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2)\,dt = 50134{,}5 \text{ kcal}$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII: PROBLEME DIVERSE

VII.1. PROBLEME DE SINTEZĂ

940. Se dă $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$

a) Să se precizeze mulţimea punctelor din intervalul $[-\pi,\pi]$, pentru care f are sens.

b) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei date.

c) Să se afle mulţimea valorilor funcţiei date.

d) Să se arate că există intervale pe care funcţia dată este inversabilă şi să se precizeze pe fiecare interval de ireversibilitate expresia funcţiei inverse.

Soluţie

a) Avem $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sqrt{2} \times \cos(x - \frac{\pi}{4})$. Punînd condiţia $\cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0$, rezultă $-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ şi în general $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ cu $k \in Z$.

Ţinînd seama de limitarea din problemă, corespunde numai soluţia pentru $k = 0$ şi deci $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

b) Funcţia dată poate fi privită ca rezultînd din compunerea funcţiilor $y = \ln u$ cu $u > 0$ şi $u = \sin x + \cos x$ cu $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, continue şi dervabile pe intervalele respective.

Mai observăm: $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4} + 0} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4} - 0} f(x) = -\infty$.

c) $u' = \cos x - \sin x$ şi $u' = 0$ numai pentru $x = \frac{\pi}{4}$. Avem tabloul alăturat în care se ţine seama de proprietăţile de monotonie a funcţiei logaritmice.

Scanned with OKEN Scanner

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$
u'		$+$	0	$-$	
u	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$\ln u$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Din tablou se citește că mulțimea valorilor este $(-\infty, \ln\sqrt{2})$ și că fiecare valoare este luată de două ori cu excepția celei mai mari dintre valori, $\ln\sqrt{2}$, care este luată o singură dată.

d) Tot din tablou se vede că există două intervale de amplitudine maximă pe care funcția admite inversă: $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ și $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$. Făcînd inversarea referitoare la primul interval (prin rezolvarea ecuației $\ln\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = y$) obținem $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = e^y$. Dacă $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, deci $x-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ găsim $x-\frac{\pi}{4} = -\arccos 2^{-\frac{1}{2}} e^y$ și $x = \frac{\pi}{4} - \arccos 2^{-\frac{1}{2}} e^y$, arată că funcția definită pe $(-\infty, \ln\sqrt{2}]$ prin $y = \frac{\pi}{4} - \arccos 2^{-\frac{1}{2}} e^x$, este funcția inversă a funcției date pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Analog, $y = \frac{\pi}{4} + \arccos 2^{-\frac{1}{2}} e^x$, $x \in (-\infty, \ln\sqrt{2})$, este inversa pe $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

941. Se dau funcțiile $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x-1}}$, $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^2-1}}$, ...,

Scanned with OKEN Scanner

$f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^n - 1}}$, $n \in N^* - \{1\}$.

a) Să se stabilească domeniul lor de definiţie.

b) Să se determine

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+f_1(x) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+f_2(x) & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+f_n(x) \end{vmatrix}$$

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1+0} (x-1) f(x)$

Soluţie

a) Vom considera două cazuri: $n = 2k$ şi $n = 2k+1$. În cazul $n = 2k$ avem $\sqrt[n]{x-1} \geq 0$. Dacă $x \in (1, +\infty) \Rightarrow x^2 - 1 > 0, \dots, x^n - 1 > 0$, deci domeniul maxim al funcţiilor este $(1, +\infty)$. În cazul $n = 2k+1$, avem $x \in R - \{-1, 1\}$.

b)
$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & f_2(x) & \dots & 0 \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & f_n(x) \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot f_1(x) \dots f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^2-1}} \dots \frac{1}{\sqrt[n]{x^n-1}} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)\sqrt[n]{(x+1)(x^2+x+1)\dots(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)}}$$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

Scanned with OKEN Scanner

942. a) Fie $0<a<b$ şi $f(x)=\ln x$; conform teoremei lui Lagrange există cel puţin un punct $\theta\in(a,b)$ astfel încît $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\theta)$. Să se arate că $\theta\in(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2})$

b) Să se demonstreze inegalităţile: $e^{\frac{1}{3n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<e^{\frac{1}{2n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Soluţie

a) Deoarece $f'(\theta)=\theta^{-1}$, formula creşterilor finite devine $(b-a)^{-1}(\ln b-\ln a)=\theta^{-1}$. Faptul că $\theta\in\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$ va fi demonstrat dacă reuşim să stabilim inegalităţile: $\frac{2(b-a)}{a+b}<\ln b-\ln a<(b-a)\sqrt{ab}$, sau notînd $t=b\cdot a^{-1}$ revine la a demonstra că

$2(t-1)(t+1)^{-1}<\ln t<(t-1)t^{-\frac{1}{2}}$ cu $t\in[1,+\infty]$.

Pentru aceasta considerăm funcţiile $f_1,\ f_2:[1,+\infty]\to\mathbb{R}$ cu $f_1(t)=2(t-1)(t+1)^{-1}-\ln t$ şi $f_2(t)=\ln t-(t-1)t^{-\frac{1}{2}}$. Avem $f_1'(t)=-\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\le 0$, $f_2'(t)=-\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}\le 0$, $t\in[1,+\infty]$, cazurile de egalitate avînd loc dacă şi numai dacă $t=1$. Deoarece $f_j(1)=0$, $j=\overline{1,2}$, rezultă valabilitatea inegalităţilor $f_j(t)\le 0$, $t\in[1,+\infty]$, $j=\overline{1,2}$, egalitatea avînd loc numai pentru $t=1$.

Prin urmare $f_j(t)<0$, $\forall t\in(1,+\infty)$, $j=\overline{1,2}$.

Dar aceste inegalităţi sînt echivalente cu inegalităţile în a şi b care implică $\theta\in(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2})$.

b) Deoarece pentru $t\in[1,4]$, $\frac{t-1}{\sqrt{t}}<\frac{3(t-1)}{t+2}$, din inegalităţile în a şi b deducem că $\frac{2(t-1)}{t+1}<\ln t<\frac{3(t-1)}{t+2}$, $\forall t\in(1,4)$. Fie $t=1+\frac{1}{n}$, unde n este un număr natural arbitrar. Din ultima inegalitate avem:

$\frac{2n}{2n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3n}{3n+1}$, sau $e^{-\frac{1}{2n+1}}<\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e^{-\frac{1}{3n+1}}$.

Scanned with OKEN Scanner

943. Fie $f:\mathbb{I}\to[0,+\infty]$, $f(x)=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

a) Să se determine I.

b) Să se arate că funcţia f este bijectivă pe I.

c) Să se determine inversa funcţiei f.

Soluţie

a) Din condiţiile $x\geq 0$, $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}>0\Rightarrow x\in[0,1)=\mathbb{I}$, cu $1-\sqrt{x}\neq 0$

b) Fie $x_1, x_2\in[0,1)$. Aunci din $f(x_1)=f(x_2)$ rezultă

$$\ln\frac{1+\sqrt{x_1}}{1-\sqrt{x_1}}=\ln\frac{1+\sqrt{x_1}}{1-\sqrt{x_2}}\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{x_1}}{1-\sqrt{x_1}}=\frac{1+\sqrt{x_2}}{1-\sqrt{x_2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1+\sqrt{x_1}+1-\sqrt{x_1}}{1+\sqrt{x_1}-1+\sqrt{x_1}}=\frac{1+\sqrt{x_2}+1-\sqrt{x_2}}{1+\sqrt{x_2}-1+\sqrt{x_2}}\Rightarrow\frac{2}{2\sqrt{x_1}}=\frac{2}{2\sqrt{x_2}}\Rightarrow x_1=x_2$$

deci funcţia este injectivă. Fie $y\in[0,+\infty)$ şi să arătăm că îi corespunde $x\in[0,1)$ astfel încît $y=f(x)$. Avem $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\Leftrightarrow\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=e^y\Rightarrow$

$\sqrt{x}=\dfrac{e^y-1}{e^y+1}\Rightarrow x=\left(\dfrac{e^y-1}{e^y+1}\right)^2$. Evident $\left(\dfrac{e^y-1}{e^y+1}\right)^2\in[0,1)$.

Funcţia este surjectivă, deci este bijectivă.

c) Funcţia fiind bijectivă, admite inversă şi inversa sa este

$$f^{-1}:[0,+\infty)\to[0,1),\ f^{-1}(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2.$$

944. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sin\pi x-x^2$.

a) Să se arate că ecuaţia $f(x)=0$ admite o singură soluţie nenulă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{n}{12}\right)$ pentru n = 1, 2, 3 şi să se indice o valoare a soluţiei nenule a ecuaţiei $f(x)=0$ cu o aproximaţie de o zecime.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie

a) Deoarece funcţia *sin* ia valori în [-1,1] este suficient să ne limităm la soluţiile din acest interval (în afara acestui interval nu poate avea soluţii căci $x^2 > \sin \pi x$ pentru $|x| > 1$!). Putem utiliza fie metoda grafică fie şirul lui Rolle. Pentru metoda grafică avem figura alăturată.

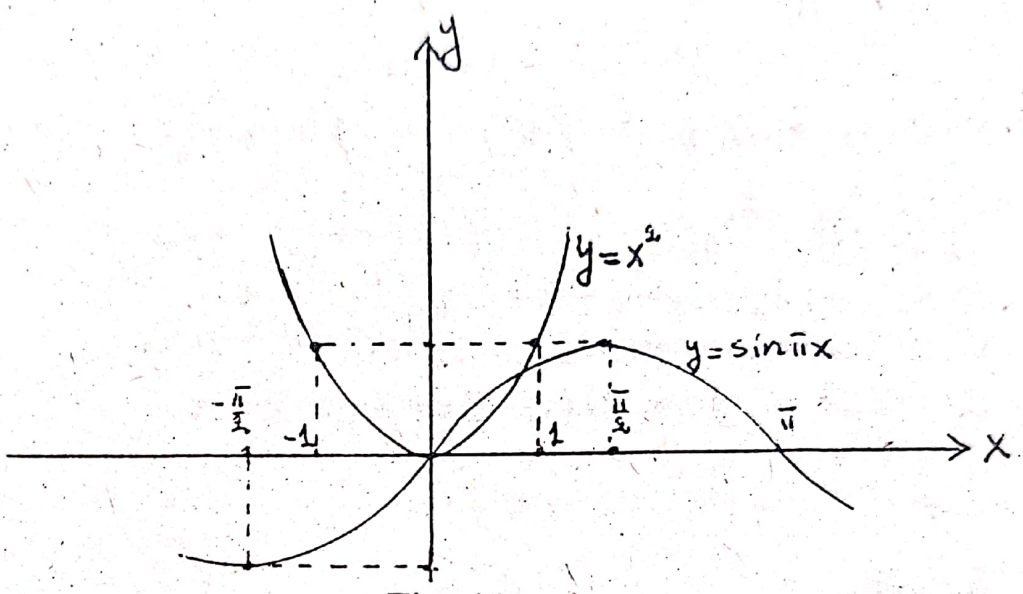


Fig. 44.

Mai mult, soluția este pe $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ deoarece $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Şirul lui Rolle este dat de tabelul:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	x_1	0	x_2	$\frac{1}{2}$	1
f'(x)		—	0	+	0	—	
f(x)		—		0		+	

b) $f\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9}{16} > 0,$

$f\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{12}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{25}{36} < 0,$

$f\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{12}\right) = f\left(\frac{11}{12}\right) = \sin 15^0 - \frac{121}{144} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) - \frac{121}{144} < 0.$

Scanned with OKEN Scanner

Deci soluția ecuației $f(x)=0$ este pe intervalul $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right]$. Cum lungimea întregului interval este $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}<\frac{1}{10}$ rezultă că orice număr din acest interval constituie o aproximare de o zecime a soluției; de exemplu $\frac{5}{6}$ și $\frac{3}{4}$.

945. Se dă funcția $f: D \to \mathbb{R}$, prin $f(x)=\frac{3x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)$, D fiind domeniul maxim de existență.

Să se determine:

a) domeniul maxim de definiție

b) asimptotele graficului funcției f

c) soluțiile ecuației $2f(x)-6x=3x(\ln 2-\ln x)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$

Soluție

a) Din domeniul $e-\frac{1}{3x}>0$, $x\neq 0$, rezultă $D=(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{3e},+\infty\right)$

b) Dreapta $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2e}$ este asimptotă oblică; $x=\frac{1}{3e}$ este asimptotă verticală.

c) Soluția ecuației este $x=2e+\frac{1}{3e}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\frac{3}{2}$

946. Aplicînd teorema lui Lagrange funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$, să se arate că:

a) Șirul $(a_n)_{n\in N^*}$ definit prin $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ este divergent;

b) Șirul $(b_n)_{n\in N^*}$ definit prin $b_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ este convergent.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie

a) Din teorema lui Lagrange aplicată funcţiei $f(x)=\ln x$ pe intervalul $[k,k+1]$, $k\in\mathbb{N}$ deducem $\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{x_k}$, unde $x_k\in(k,k+1)$ prin urmare $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$, de unde rezultă $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\ln(n+1)$ inegalitate care arată că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent.

b) Însumînd inegalităţile $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$, k = 1, 2, ..., n obţinem $\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ din care rezultă:

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\ln n<\ln\frac{n+1}{n}<1+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$$

şi deci $b_n>0$ şi $b_{n+1}<1$ pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$, adică şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, este mărginit. Avem $b_n-b_{n+1}=\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}>0$ ceea ce arată că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător, deci convergent şi $0\le\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)<1$.

947. Să se discute ecuaţia $2x^2-\ln|x|+p=0$, după valorile parametrului real p. Să se rezolve ecuaţia în cazul $p=-2$, determinînd rădăcinile ei iraţionale, cu o aproximaţie de o zecime.

Soluţie

Ecuaţia dată este echivalentă cu $2x^2-\ln|x|=-p$. Reprezentăm grafic funcţiile $f(x)=2x^2-\ln x$ şi $g(x)=-p$. Conform graficului din figura de pe pagina următoare avem:

Dacă $g(x)=-p>\frac{1}{2}+\ln 2\Rightarrow p<-\frac{1}{2}-\ln 2$, ecuaţia are patru rădăcini reale distincte: $x_1=-x_3\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $x_2=-x_4\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

Dacă $g(x)=-p=\frac{1}{2}+\ln 2\Rightarrow p=-\frac{1}{2}-\ln 2$, ecuaţia are patru rădăcini reale: $x_1=x_2=-x_3=-x_4=\frac{1}{2}$.

Dacă $g(x)=-p<\frac{1}{2}+\ln 2\Leftrightarrow p>-\frac{1}{2}-\ln 2$, ecuaţia are rădăcini

Scanned with OKEN Scanner

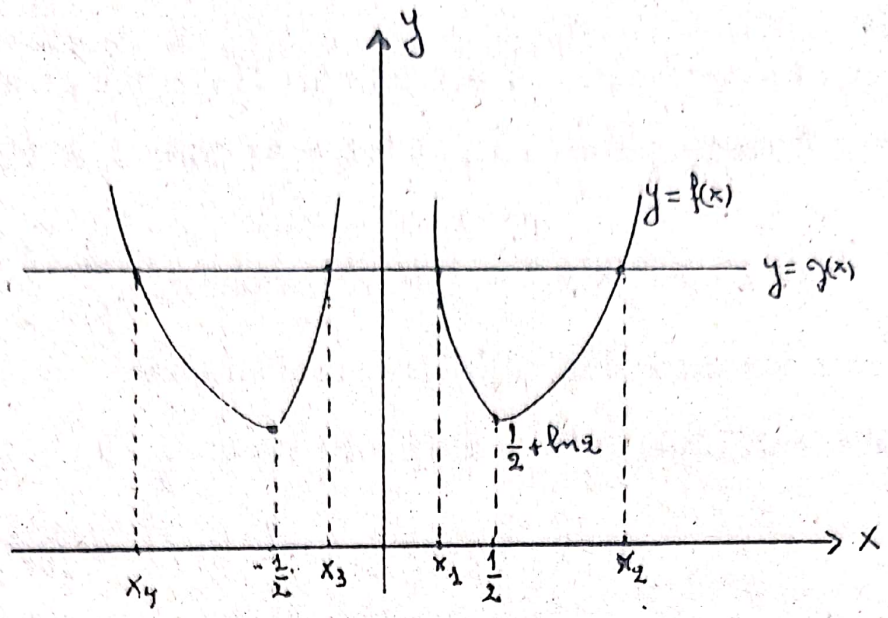


Fig. 45.

complexe. Din discuţia făcută rezultă că, pentru $p = -2$, ecuaţia are patru rădăcini reale distincte: $x_1 = -x_3 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $x_2 = -x_4 \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Restrîngînd intervalele $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ la $\left(\frac{1}{2e}, \frac{1}{e^2}\right)$, obţinem $x_1 = -x_3 \simeq o,1$. Celelalte două rădăcini sînt: $x_2 = -x_4 = 1$.

948. Folosind formula lui Taylor să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$.

R.

a) $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + R_4(\theta X);\ 0 < \theta < 1$

$e^{-x^2} = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{3x^4}{4!} + R_4'(\theta' X);\ 0 < \theta' < 1$ unde R_4 şi $R'_4 \to 0$ pentru $x \to 0$.

Limita este $-\dfrac{1}{12}$.

b) Se înlocuieşte x cu $\dfrac{1}{y}$ şi se găseşte limita $\dfrac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

949. Se consideră funcţiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \ln(1+\sqrt{1+x^2})$, $g(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

a) Să se studieze monotonia funcţiei f şi să se precizeze care este cea mai mică valoare a ei.

b) Să se arate că pentru $\forall x > 0$ este verificată relaţia

$$x e^{g(x)}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' + g'(x)$$

c) Să se arate că polinomul $(1-x+x^2)^{2n+1} + (1+x+x^2)^{2n-1}$ este divizibil prin $(e^{f(x)}-1)^2$.

d) Să se găsească soluţiile din $(0, \pi)$ ale ecuaţiei trigonometrice $f(tg\,\alpha) = g(ctg\,\alpha) - \frac{1}{2}\ln 3$.

e) Să se arate că $g(x) < x$, $\forall x > 0$.

R.

a) Cea mai mică valoare este $\ln 2$.

b) $e^{g(x)} = x + \sqrt{1+x^2}$. Se verifică prin calcul direct.

c) $(e^{f(x}-1)^2 = 1+x^2$. Se arată că soluţiile ecuaţiei $1+x^2=0$ sînt de asemenea soluţii ale polinomului.

d) $f(tg\,\alpha) = \ln\left(\frac{|\cos\alpha|+1}{|\cos\alpha|}\right)$; $g(ctg\,\alpha) = \ln\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$. Se găseşte soluţia $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

e) Se consideră funcţia $\Phi(x) = g(x) - x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x$ şi se studiază derivata ei.

950. Fie funcţiile $f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n+1} + (x-1)^{2n+1}}{(x+1)^{2n+1} - (x-1)^{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că funcţia f_n (n fixat) este continuă, impară şi bijectivă. Să se determine funcţia inversă f_n^{-1}.

b) Să se determine tangenta la graficul funcţiei f_n în punctul (0,0). Să se determine a şi b astfel încît $\lim\limits_{n\to\pm\infty}[f_n(x) - (ax+b)] = 0$. Să se traseze graficul lui f_n.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Scanned with OKEN Scanner

R.

a) Domeniul de definiţie este $\mathbb{R}$ deoarece numitorul este diferit de 0, $\forall x \in \mathbb{R}; f_n(x)$ este continuă fiind o funcţie raţională; funcţia este impară deoarece numărătorul este un polinom impar iar numitorul un polinom par.

$$f_n^{-1}(x) = \frac{\sqrt[2n+1]{x+1} + \sqrt[2n+1]{x-1}}{\sqrt[2n+1]{x+1} - \sqrt[2n+1]{x-1}}$$

b) $y = (2n+1)x$ este tangenta la grafic în punctul (0,0). $a = \frac{1}{2n+1}$, $b = 0$

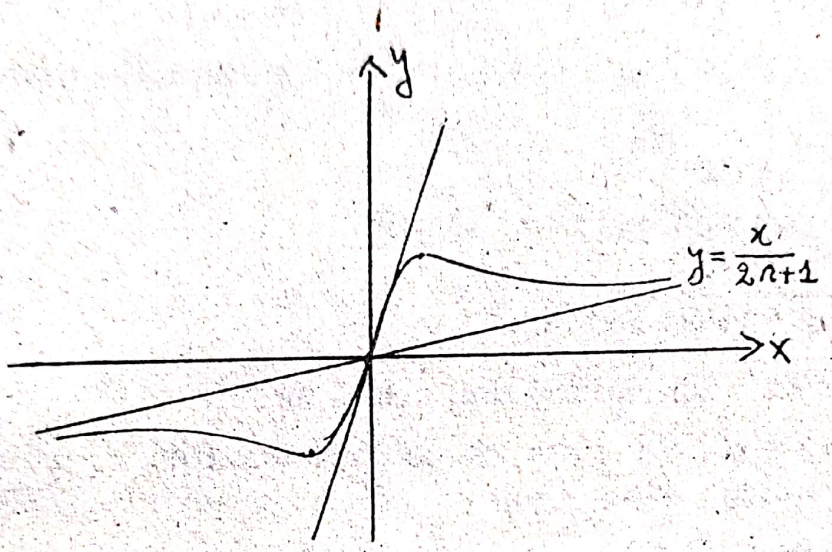


Fig. 46.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

951. Se dă $E_n(x) = \log_{a_0} x + \log_{a_1} x + \log_{a_2} x + \ldots + \log_{a_n} x$, unde $a_n = a^{x^n}$.

a) Să se restrîngă $E_n(x)$

b) Să se determine pentru ce valori ale lui x şirul $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent; în acest caz să se determine funcţia limită şi apoi să se reprezinte grafic.

R.

a) $E_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x^n(x-1)} \cdot \log_a x.$

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru $0<\frac{1}{x}<1$ adică $x\in(1,+\infty)$ rezultă $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}E_n(x)=\frac{x}{x-1}\log_a x$.

Graficul funcției $f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{(x-1)\ln a}$, $x\in(1,\infty)$ este în figura de mai jos.

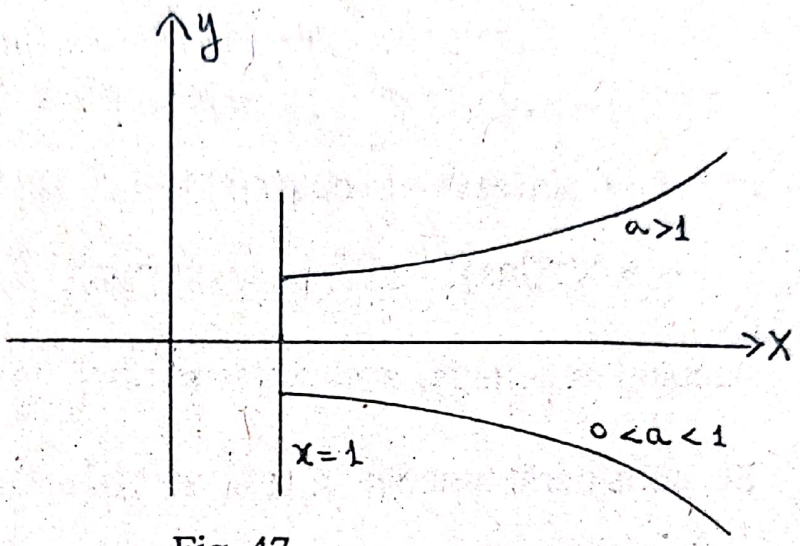


Fig. 47.

952. În exercițiile următoare, calculați y' logaritmînd în prealabil funcția $y=f(x)$.

a) $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)$

b) $y=x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$

c) $y=x^x$

d) $y=\sqrt[x]{x}$

e) $y=x^{\sqrt{x}}$

f) $y=x^{x^x}$

g) $y=x^{\sin x}$

h) $y=(arctgx)^x$

R.

a) $(1+2x)(1+3x)+2(1+x)(1+3x)+3(x+1)(1+2x)$;

b) $\frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$; c) $x^x(1+\ln x)$; d) $\sqrt[x]{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$;

e) $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\ln x\right)$; f) $x^{x^x}x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$;

g) $x^{\sin x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)$; h) $(arctgx)^x\left[\ln(arctgx)+\frac{x}{(1+x^2)\,arctgx}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

953. Să se arate că funcţia $f(x)=x^n\cdot[A\cdot\cos(\ln x)+B\cdot\sin(\ln x)]$, $x>0$, A şi B fiind constante, verifică ecuaţia:

$$x^2\cdot f''(x)+(1-2n)\cdot x\cdot f'(x)+(1+n^2)\cdot f(x)=0$$

Soluţie

$$f'(x)=n\cdot x^{n-1}\cdot[A\cdot\cos(\ln x)+B\cdot\sin(\ln x)]+$$

$$+x^{n-1}\cdot[-A\cdot\sin(\ln x)+B\cdot\cos(\ln x)]$$

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}\cdot[A\cdot\cos(\ln x)+B\cdot\sin(\ln x)]+$$

$$+nx^{n-2}\cdot[-A\cdot\sin(\ln x)+B\cdot\cos(\ln x)]+(n-1)x^{n-2}\cdot[-A\sin(\ln x)+$$

$$+B\cos(\ln x)]+x^{n-2}\cdot[-A\cdot\cos(\ln x)-B\cdot\sin(\ln x)]$$

Înlocuind în ecuaţie, aceasta se verifică imediat.

954. Se consideră funcţiile $f_n:[1,\infty]\to(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$, definite prin $f_n(x)=\dfrac{x}{n^2+x^4}$. Să se determine $a_n=\sup\limits_{x\in[1,\infty)}f_n(x)$.

Soluţie

Deoarece $f_n'(x)=\dfrac{(n+\sqrt{3}x^2)(n-\sqrt{3}x^2)}{(n^2+x^4)^2}$, ecuaţia $f_n'(x)=0$ are pe $[1,\infty)$ numai soluţia $x_0=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{3}}$. Se observă că $f_n'(x)>0$ pentru $1\le x<x_0$ şi $f_n'(x)>0$ pentru $x>x_0$. De aceea x_0 este un punct de maxim şi $f_n(x_0)=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{3}}\cdot\dfrac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$.

În plus, $f_n(1)=\dfrac{1}{n^2+1}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=0$. Comparînd pe $f_n(1)$, $f_n(x_0)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=0$, deducem că $a_n=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{3}}\cdot\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

955. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$, definite prin $f_n(x)=\dfrac{x^2}{1+nx^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine $a_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x)$

Soluție Evident f_n sînt derivabile și $f_n'(x) = \frac{2x}{(1+nx^2)^2} \Rightarrow f_n'(x) < 0$, $x < 0$; $f_n'(x) = 0$, $x = 0$; $f_n'(x) > 0$, $x > 0$. De aceea $x_0 = 0$ este un punct de minim. Comparînd numerele $\lim_{x \to \pm\infty} f_n(x) = \frac{1}{n}$ și $f_n(0) = 0$, deducem că $a_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = \frac{1}{n}$.

956. Se dă funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$. Să se arate că $\max_x f(x) \geq \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2}$.

Soluție

Deoarece $0 < \sin^2 x \leq 1$ rezultă că $\frac{1}{\sin^2 x} \geq 1$ și deci:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \geq 1 - \frac{1}{x^2}$$

Pe de altă parte pentru $\Phi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ avem $\Phi'(x) = \frac{2}{x^3}$ și următorul tabel de variație:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\Phi'(x)$	$-$	$-$	$\|$	$+$	$+$
$\Phi(x)$	$1 - \frac{4}{\pi^2}$ $\searrow$	$-\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$1 - \frac{4}{\pi^2}$

Astfel $\max_x \Phi(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$ și deci $\max_x f(x) \geq \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

957. Forţa de frînare a unei frîne electrice cu şaibă este dată în funcţie de viteza periferică x, de formula $F(x)=\frac{ax}{b^2+x^2}$, $a, b>0$, $x\geq 0$. Să se determine forţa de frînare cea mai mare posibilă.

Soluţie $F'(x)=\frac{ab^2-ax^2}{(b^2+x^2)^2}$; $F'(x)=0 \Rightarrow ab^2-ax^2=0, \Rightarrow x=b$.

$F''(x)=\frac{-2ax(b^2+x^2)+2x(ab^2-ax^2)}{(b^2+x^2)^3}$, $F''(x)=-\frac{2ab}{4b^4}<0$, pentru $x=b$;

deci pentru $x=b$ avem maxim $F=\frac{a}{2b}$.

958. Curba de magnetizare a fierului este dată de formula $y=e^{\frac{x}{a+bx}}$, unde x este intensitatea cîmpului magnetic, y este inducţia, iar a şi b constante. Să se determine valoarea lui x pentru care permeabilitatea $\mu=\frac{y}{x}$ are valoarea cea mai mică sau cea mai mare posibilă.

Soluţie $\mu=\frac{y}{x}=\frac{e^{\frac{x}{a+bx}}}{x}$, $\mu'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{x}{a+bx}}+\frac{a}{x(a+bx)^2}\cdot e^{\frac{x}{a+bx}}$.

$\mu'=0$ dacă $\frac{a}{(a+bx)^2}-\frac{1}{x}=0$, sau $b^2x^2+(2ab-a)x+a^2=0$,

$x=\frac{a}{2b^2}(1-2b\pm\sqrt{1-4b})$.

959. Toţi locuitorii dintr-un oraş vorbesc fie franceza, fie germana. Dacă 64% vorbesc franceza şi 58% germana, cîţi vorbesc ambele limbi?

Soluţie Nu se cunoşte numărul locuitorilor oraşului, iar datele sînt procentuale. Se impune deci a lua ca număr de locuitori ai oraşului 100 şi rezultatul va fi tot un procent. Se poate aplica diagrama Venn.

Notăm F = {locuitorilor de limbă franceză}, G = {locuitorilor de limbă germană}, E = {locuitorilor oraşului}.

Atunci avem Card(F) = 64, Card(G) = 58, Card(E) = 100. Card(FUG) = Card(F) + Card(G) - Card(F∩G), deci Card(F∩G) = 64 +

Scanned with OKEN Scanner

58 - 100 = 22; astfel, 22% din locuitori sînt bilingvi.

960. Presupunem că un mobil are la fiecare moment $t \in [0,2]$ coordonatele $x = 2t$, $y = t^2 - t$.

a) Să se figureze traiectoria mobilului

b) Să se calculeze vectorul viteză și să se determine în ce moment viteza mobilului este minimă.

Soluție

a) $x \in [0,4]$ și $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x}{2} = \frac{x^2 - 2x}{4}$. Traiectoria mobilului va fi o porțiune din parabola $y = \frac{x^2 - 2x}{4}$.

b) Vectorul de poziție al punctului M la momentul t este $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - t)\vec{j}$, deci vectorul viteză va fi $\vec{r}'(t) = 2\vec{i} + (2t - 1)\vec{j}$. Mărimea lui este $v(t) = \|\vec{r}'\| = \sqrt{4 + (2t-1)^2}$ și viteza minimă este atinsă la momentul $t = \frac{1}{2}$.

961. Fie figura de mai jos.

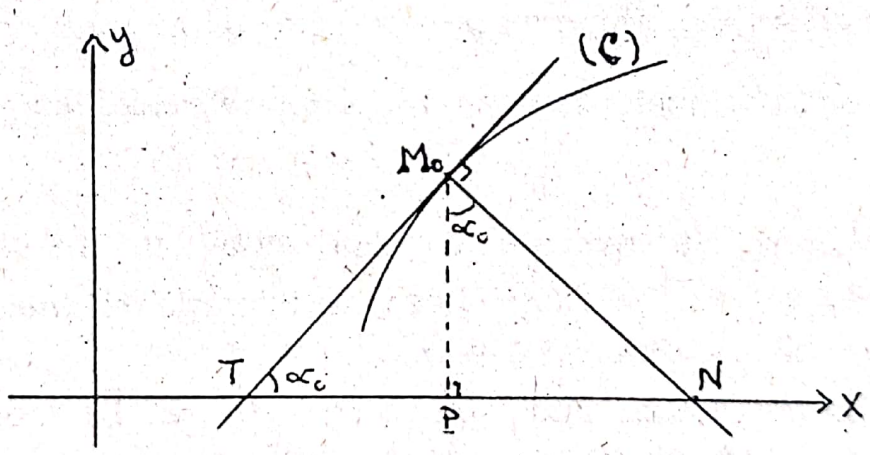


Fig. 48.

Știind că ecuația tangentei (TM_0) este $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, a normalei $(M_0N): y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ și că $tg\,\alpha_0 = f'(x_0)$ să se afle:

a) Lungimea tangentei TM_0, normalei NM_0 subnormalei PN și subtangentei TP;

Scanned with OKEN Scanner

b) Ecuația tangentei și a normalei la curba $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ în punctul $x_0=8$.

Soluție

a) $M_0P=f(x_0)$; $tg\,\alpha_0=\dfrac{M_0P}{TP}\Rightarrow TP=\left|\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$;

$$TM_0^2=f^2(x_0)+\frac{f^2(x_0)}{(f'(x_0))^2}=\frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}[1+(f'(x_0))^2] \text{ sau}$$

$$TM_0=\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}$$

$$tg\,\alpha_0=\frac{PN}{M_0P}\Rightarrow PN=M_0P\cdot tg\,\alpha_0=|f(x_0)\cdot f'(x_0)|$$

$$NM_0=PN^2+M_0P^2=f^2(x_0)\cdot[f'(x_0)]^2+f^2(x_0)=f^2(x_0)[1+(f'(x_0))^2]$$

de unde $NM_0=|f(x_0)|\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}$.

b) $f(x_0)=f(8)=(2^3)^{\frac{2}{3}}=4$; $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $f'(8)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

Ecuația tangentei este $y-4=\dfrac{1}{2}(x-8)$ sau $-x+2y=0$.

Ecuația normalei este $y-4=-2(x-8)$ sau $2x+y-20=0$.

962. Legea de mișcare a unui mobil de masă 3 kg este $S(t)=5t^2-2t+1$. Calculați viteza, accelerația și energia cinetică a acestui mobil la momentul t = 3.

Soluție Viteza este $v(t)=S'(t)=10t-2$. La momentul t = 3 avem $v(3)=(10\cdot3-2)\,m/s=28\,m/s$; $v(3)=28\,m/s$.

Accelerația a(t) = v'(t) = S"(t) = 10; a(3) = 10 m/s².

Energia cinetică $E_c=\dfrac{mv^2}{2}=\dfrac{3\cdot28^2}{2}\dfrac{kg^2}{s^2}=1176\dfrac{kg^2}{s^2}$.

963. Într-un recipient conținînd o soluție de nitrat de argint se introduc doi electrozi legați la bornele unui acumulator. Măsurînd în miligrame cantitatea de argint q(t) depusă la catod în t secunde, se constată că

Scanned with OKEN Scanner

verifică relaţia $q(t)=\ln(1+t)$. Ştiind că $q(t)$ este proporţională cu cantitaţea de electricitate $Q(t)$ măsurată în coulombi, determinaţi intensitatea curentului electric care trece prin soluţie de la timpul $t_1=0$ la $t_2=2$ (coeficientul de proporţionalitate este 1,118).

Soluţie Se ştie că $Q(t)=1{,}118\cdot\ln(1+t)$ şi că $I(t)=Q'(t)$, de unde $I(t)=1{,}118\cdot\frac{1}{1+t}$. Deci $I(0)=1{,}118$ amperi şi $I(2)=0{,}373$ amperi.

964. Se consideră o bară metalică neomogenă OA, de lungime 6 cm. Măsurînd în grame masa unei părţi oarecare OM a barei de lungime x, se constată că verifică relaţia $m(x)=x+2x^2$. Determinaţi densitatea acestei bare în mijlocul ei.

Soluţie Se ştie că $\rho(x_0)=m'(x_0)$, $m'(x)=1+4x$, de unde $m'(3)=(1+4\cdot3)\text{g/cm}^3=13\text{g/cm}^3$. Deci $\rho(3)=13\text{g/cm}^3$.

965. O linie electrică de înaltă tensiune trece prin apropierea a două sate de centre A (la distanţa de 10 km de linie) şi B (la distanţa de 5 km de la linie). Se ştie că proiecţia punctelor A şi B pe linie sînt A' şi B' şi că $A'B'=9$ km. În scopul electrificării acestor două sate, găsiţi un punct S pe linie care permite de a reduce la minimum lungimea celor două fire care pleacă spre cele două sate.

R. Se notează $A'S=x$, $L(x)=\sqrt{100+x^2}+\sqrt{(9-x)^2+25}$, $x\in[0,9]$. Făcînd $L'(x)=0$ se găseşte un minim $m(6,\sqrt{306})$.

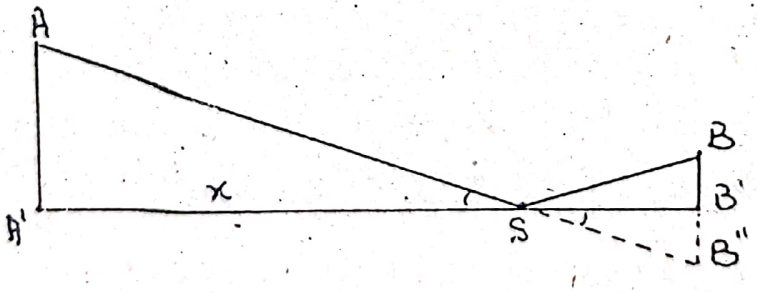


Fig. 49.

966. O piesă metalică de formă sferică, de rază 9 cm, se dilată sub efectul căldurii. Ştiind că raza se alungeşte uniform cu 0,0027 cm/s, determinaţi viteza de creştere a volumului acestei piese.

Scanned with OKEN Scanner

R. $V(t) = \frac{4\pi r^3(t)}{3} \Rightarrow$ viteza de creștere egală cu 2,746872 cm^3/s.

967. Un corp este lansat vertical în aer cu viteza inițială de 100 m/s. Determinați:
a) timpul de ascensiune;
b) înălțimea la care ajunge acest corp;
c) timpul de cădere;
d) viteza cu care atinge solul.
R.

a) Se știe că $S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$; $v(t) = -g(t) + v_0 \Rightarrow v(t) = 0 \Rightarrow t \simeq 10{,}2\,s$

b) $S(10{,}2) \simeq 510{,}204$ m

c) $t = 10{,}2$ s

d) $S(t) = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v(10{,}2) \simeq 100$ m/s

968. O tijă neomgenă AB are lungimea de 12 cm. Masa părții AM din această tijă este proporțională cu pătratul distanței punctului curent M la extremitatea A și este de 10 g pentru AM = 2 cm. Determinați masa tijei AB și densitatea liniară într-un punct oarecare M.

R. $\frac{m_1}{m} = \frac{AM^2}{AB^2} \Rightarrow$ m = 360 g. Masa întregii tije este de 360 g.

Din $\frac{m_1}{360} = \frac{AM^2}{12^2} \Rightarrow m_1(x) = 360\,\frac{(x-0)^2}{144} = \frac{5x^2}{2}$. Dar $\rho(x) = m'(x)$, atunci $\rho(x) = m_1'(x) = 5x\,g/cm^2$.

VII.3. PROBLEME DATE LA OLIMPIADE

969. Se consideră funcțiile de gradul al doilea $f(x) = 2x^2 + 2$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Să se arate că pentru orice funcție de gradul al doilea h astfel încît $g(x) \le h(x) \le f(x)$, oricare ar fi x real, avem $h(1) = 4$ și există $\lambda \in [0,1]$ constant, astfel încît $h(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)$, $\forall x \in R$.

Soluție Pentru $x = 1$ avem $g(1) \le h(1) \le f(1)$, adică $4 \le h(1) \le 4$, deci $h(1) = 4$. Graficele celor trei funcții sînt prezentate în figura următoare.

Scanned with OKEN Scanner

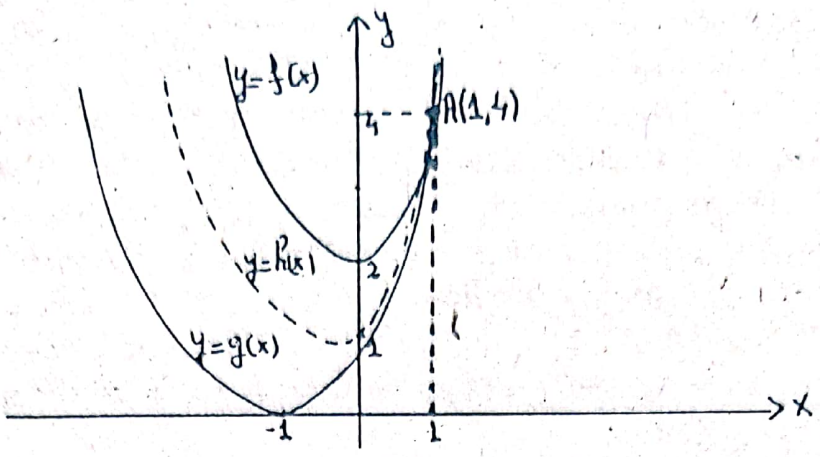


Fig. 50.

Ecuația de gradul doi $h(x)=g(x)$ are $x=1$ rădăcină dublă. Deci există $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încît $h(x)-g(x)=\lambda(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dar $f(x)-g(x)=(x-1)^2$ și relația devine $h(x)-g(x)=\lambda[f(x)-g(x)]$ sau $h(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rămîne să mai arătăm că $\lambda \in [0.1]$. Din condiția $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ deducem $0 \leq h(x)-g(x) \leq f(x)-g(x)$ sau, ținînd seama că $h(x)-g(x)=\lambda(x-1)^2$ și de definițiile lui f și g obținem $0 \leq \lambda(x-1)^2 \leq (x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $0 \leq \lambda \leq 1$.

970. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x+a^x$, cu $a>1$, este bijectivă.

Soluție Să arătăm că f este injectivă. Deoarece $a>1$ atunci funcția $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x)=a^x$ este strict crescătoare. Dar și funcția $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x)=x$ este o funcție strict crescătoare. Rezultă că funcția f este strict crescătoare, deoarece este suma a două funcții strict crescătoare. Deoarece f este strict monotnă, rezultă că este injectivă. Pentru surjectivitate trebuie să arătăm că $\forall m \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ astfel încît $x+a^x=m$ sau $a^x=-x+m$. A arăta că această ecuație are soluție, revine la a arăta că graficele funcțiilor $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x)=a^n$ și $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x)=-x+m$ se intersectează. Funcția f_3 are graficul o paralelă cu a doua bisectoare și se observă că cele două grafice se intersectează.

971. Fie M mulțimea tuturor numerelor întregi ce nu conțin cifra 9 în scrierea lor zecimală. Fie $x_1, x_2, \ldots x_n$ elemente din M, distincte două cîte două. Să se demonstreze că $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} < 80$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție Problema amintește de seria armonică. Cum aici este vorba de scrierea zecimală, vom grupa termenii situați între puterile consecutive ale lui 10. Anume, numerele întregi x pentru care $10^{k-1} \leq 10 \leq 10^k$ au cîte k cifre, pentru prima cifră avem 8 posibilități (1,2,...,8), iar pentru fiecare din celelalte k-1 cîte 9 posibilități (0,1,2,...,8), aceasta pentru a obține numere din M. Aceste numere x sînt toate $\geq 10^{k-1}$. Deci porțiunea din suma din enunț conține toți x_j cu proprietatea $10^{k-1} \leq x_j < 10^k$ are cel mult $8 \cdot 9^{k-1}$ termeni, fiecare din ei nedepășind $10^{-(k-1)}$; în consecință valoarea acestei porțiuni din sumă este mai mică decît $8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$. Toată suma este formată dintr-un număr finit de astfel de porțiuni, ce corespund la valori k din mulțimea {1,2,3,...}, deci valoarea este majorată de suma progresiei geometrice respective, care este $8 \cdot \left(1 - \frac{9}{10}\right)^{-1} = 80$.

972. Să se demonstreze că dacă $0 < a \leq 1$, $s \neq 1$, $s > 0$ și a este rațional, atunci $\frac{1 - s^a}{1 - s} \leq \frac{1 + s^a}{1 + s}$.

Soluție Lansăm la o parte cazul $a = 1$, cînd inegalitatea devine $1 = 1$. Fie deci $0 < a < 1$. Dacă inegalitatea este valabilă pentru a și s, atunci ea va fi valabilă și pentru a și $\frac{1}{s}$, deoarece, înlocuind în inegalitate s cu $\frac{1}{s}$ se obține $\frac{(s^a - 1)s^{1-a}}{s - 1} \leq s^{1-a} \frac{s^a + 1}{s + 1}$ deci același lucru. Putem în consecință presupune $s < 1$ și scrie relația de demonstrat sub forma $1 - s^a \leq (1 - s)(1 + s)^{a-1}$ sau $f(s) \geq 0$, pentru $s \in (0,1)$, cu $f(s) = (1 - s)(1 + s)^{a-1} - (1 - s^a)$. Avem $f(0) = f(1) = 0$, deci, dacă vom dovedi existența unui $c \in (0,1)$ așa încît $f'(s) > 0$ pentru $s \in (0,c)$ și $f'(s) < 0$ pentru $s \in (c,1)$, problema va fi rezolvată, f crescînd de la $0 = f(0)$ la $f(c) > 0$ și apoi descrescînd la $f(1)$.

Se calculează:

$$f'(s) = (1 - s)(a - 1)(1 + a)^{a-2} - (1 + s)^{a-1} + as^{a-1} =$$

$$= s^{a-1}\left\{a + \left[\left(\frac{1}{s} - 1\right)(a - 1) - \left(\frac{1}{s} + 1\right)\right]\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{a-2}\right\} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= s^{a-1}\left\{a+\left(1+\frac{1}{s}\right)^{a-2}\cdot\left[(a-2)\cdot\frac{1}{s}-a\right]\right\}$$

deci semnul ei va fi semnul lui $g(t) = a + (1 + t)^{a-2} \cdot [(a - 2)t - a]$, unde $t = \frac{1}{s}$ în consecinţă $t \in (1, +\infty)$. Derivata lui g este:

$$g'(t) = (1+t)^{a-2}(a-2) + (a-2)(1+t)^{a-3}\cdot(a-2)(t-a) =$$

$$= (a-2)(1+t)^{a-3}\cdot[1+t+(a-2)t-a] =$$

$$= (a-2)(1+t)^{a-3}(a-1)(t-1) > 0$$

pentru $t \in (1, +\infty)$ deci g este crescătoare pe $(1, +\infty)$. Avem

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{x\to\infty}\left[a+t^{a-1}(t^{-1}+1)^{a-2}(a-2-at^{-1})\right] = a+0 = a > 0$$

ca urmare a ipotezei $a < 1$, g va fi pozitivă pe un interval $(d, +\infty)$ şi eventual, dacă $d > 1$, negativă pe $(1,d)$, deci f' va fi pozitivă pe $(0,d^{-1})$ şi eventual negativă pe $(d^{-1}, 1)$, dar eventualitatea are loc, altfel $0 = f(1) > f(0) = 0$.

973. Fie $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o funcţie reală definită prin $f(x) = 0$, dacă x este iraţional şi, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q^3}$ dacă $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ şi fracţia $\frac{p}{q}$ este ireductibilă. Să se arate că f are derivată în fiecare punct iraţional x_0 de forma $x_0 = \sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Soluţie Fie $x_0 = \sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

a) Fie un şir $x'_n \to x_0$ cu $x'_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $x'_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $\frac{f(x_n') - f(x_0)}{x_n' - x_0} = \frac{0-0}{x_n' - x_0}$ deci $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n') - f(x_0)}{x_n' - x_0} = 0$

b) Fie un şir $x''_n \to x_0$ cu $x''_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Avem $x_n'' = \frac{p_n}{q_n}$, $q_n > 0$ şi $(p_n, q_n) = 1$.

Mai întîi rezultă că $q_n \to +\infty$. Într-adevăr să presupunem prin absurd că $q_n \to +\infty$. Aceasta înseamnă că $\exists\, \epsilon_0 \in \mathbb{R}, \forall\, s \in \mathbb{N}, \exists\, n_s \geq s$ cu $q_{n_s} \leq \epsilon_0$. Altfel spus şirul (q_n) admite un subşir (q_{n_s}) mărginit. Cum q_{n_s} sînt numere

Scanned with OKEN Scanner

naturale, rezultă că în subșirul (q_{n_s}) există numai un număr finit de valori ale termenilor. Cum $\frac{p_n}{q_n} \to \sqrt{k}$, scriind definiția cu ϵ și luînd $\epsilon = 1$, obținem că de la un anumit rang există inegalitatea $p_n < (1+\sqrt{k})\, q_n$ și atunci $p_{n_s} < (1+k)\, q_{n_s}$. Rezultă că și subșirul (p_{n_s}) este mărginit și de aici deducem că termenii săi iau numai un număr finit de valori. Dar în aceste condiții și termenii subșirului $\frac{p_{n_s}}{q_{n_s}}$ iau doar un număr finit de valori. Dacă avem cel puțin două asemenea valori distincte, rezultă că $\left(\frac{p_{n_s}}{q_{n_s}}\right)$ nu este convergent, contradicție, iar dacă avem o singură valoare pentru termenii subșirului $\left(\frac{p_{n_s}}{q_{n_s}}\right)$, acesta este convergent către acea valoare care este rațională, deci iarăși contradicție (limita este $\sqrt{k}$, care este irațional). Contradicția obținută arată că trebuie să avem $q_n \to +\infty$.

Avem:

$$\frac{f(x_n'') - f(x_0)}{x_n'' - x_0} = \frac{\frac{1}{q_n^3}}{\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{k}} = \frac{1}{q_n^2\left(p_n - q_n\sqrt{k}\right)}$$

Deoarece $\sqrt{k}$ este irațional, rezultă $p_n^2 - q_n^2 k \neq 0$ și atunci $|p_n^2 - q_n^2 k|$ este un număr natural nenul, adică $|p_n^2 - q_n^2 k| \geq 1$, de unde $\frac{1}{|p_n - q_n\sqrt{k}|} \leq |p_n + q_n\sqrt{k}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mai ținem seama că șirul $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ fiind convergent este mărginit, deci $\exists\, M > 0$ cu $\left|\frac{p_n}{q_n}\right| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Trecînd la module avem:

$$\left|\frac{f(x_n'') - f(x_0)}{x_n'' - x_0}\right| = \frac{1}{q_n^2\left|p_n - q_n\sqrt{k}\right|} \leq \frac{\left|p_n + q_n\sqrt{k}\right|}{q_n^2} = \frac{\left|\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{k}\right|}{q_n} \leq \frac{M + \sqrt{k}}{q_n}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $q_n \to \infty$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n'') - f(x_0)}{x_n'' - x_0} = 0$

c) Fie acum un şir oarecare $x_n \to x_0$, $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă x_n are numai un număr finit de termeni raţionali, sau numai un număr finit de termeni iraţionali, atunci practic ajungem la unul din cazurile a) sau b) începînd de la un anumit rang. Să presupunem că (x_n) are o infinitate de termeni raţionali şi o infinitate de termeni iraţionali; fie (x_{n_s}') subşirul termenilor raţionali şi (x_{n_t}'') subşirul termenilor iraţionali. Atunci:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \begin{cases} 0 & , \text{dacă } x_n = x_{n_s}' \\ \dfrac{f(x_{n_t}'') - f(x_0)}{x_{n_t}'' - x_0} & , \text{dacă } x_n = x_{n_t}'' \end{cases}$$

deci $\left|\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right| \leq \left|\dfrac{f(x_{n_t}'') - f(x_0)}{x_{n_t}'' - x_0}\right|$ şi aplicînd cazul b) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

974. Fie o funcţie definită pe [0, 1], cu valori reale, crescătoare. Se presupune că pentru orice x_1, x_2, x_3 cu $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ avem:

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

a) Să se arate că în orice punct $0 < x_0 < 1$, funcţia f este continuă.
b) Se consideră funcţia f exprimată prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

Să se arate că f are proprietăţile cerute şi nu este continuă în punctul $x = 1$.

R.

a) Putem scrie $0 \leq f(x_0) - f(x) \leq (x_0 - x) \cdot \dfrac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} \to$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} [f(x_0)-f(x)] \le 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Analog se arată că $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$.

b) Deoarece $f(1) = 1$ şi $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ f nu este continuă în 1.

975. Să se arate că un şir de numere naturale, care nu are limita ∞, conţine cel puţin un subşir constant.

R. Se foloseşte definiţia cu vecinătăţi a limitei şi rezultă că $\exists$ $(x, +\infty)$, $x > 0$ în afara căruia se găsesc o infinitate de termeni ai şirului. Deci în punctele 0,1,2,...,[x] sînt plasaţi o infinitate de termeni ai şirului. Aceste puncte fiind în număr finit, rezultă că cel puţin într-unul din ele se găsesc infinitate de termeni ai şirului. Deci şirul conţine un subşir constant.

976. Un rezervor este umplut la o sursă cu un debit variabil între orele 8 şi 12. Acelaşi rezervor este golit prin scurgere a doua zi tot între orele 8 şi 12. Să se arate că există o oră t în ambele zile, la care apa este la acelaşi nivel.

R. Fie H volumul rezervorului şi se consideră funcţiile:
f, g: [8,12] $\to$ [0, H], definite astfel:

- f(t) = volumul de apă din rezervor la ora t în prima zi
- g(t) = volumul de apă din rezervor la ora t în a doua zi

Se arată că f şi g sînt continue şi că h(x) = f(x) - g(x) îşi schimbă semnul în extreme.

977. Să se arate că o funcţie f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(x)\in Q \Leftrightarrow f(x+1)\notin Q$, are cel puţin un punct de discontinuitate.

R. Se presupune prin absurd că f este continuă şi se defineşte funcţia g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g(x) = f(x+1) - f(x). Se ajunge la contradicţie observînd că în $f(x_0+2) - f(x_0) = 2\alpha$ membrul stîng este raţional, iar cel din dreapta iraţional.

978. a) Să se determine funcţiile injective f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, aşa încît $f\circ f = f$.
b) Să se determine funcţiile surjective g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, aşa încît $g\circ g = g$.

Scanned with OKEN Scanner

R.

a) Fie mai general $M \neq \phi$ o mulțime oarecare. Deoarece $(f \circ f)(x) = f(f(x))$, se găsește, datorită injectivității, funcția $f(x) = x$, $\forall x \in M \Rightarrow f = 1_M$.

b) $g(x) = y$, $\forall y \in M \Rightarrow g = 1_M$.

979. Să se determine $a,b,c \in \mathbb{N}$, $a,c < 5$ așa încît:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{an^2+bn+c} - \sqrt{an^2-bn+c}\right) = 1 .$$

R. Fie $x_n = \left(\sqrt{an^2+bn+c} - \sqrt{an^2-bn+c}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$1 = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{\sqrt{a}} \Rightarrow a \in \{1, 4\}$, $b \in \{1, 2\}$. Se deduce că $(a,b,c) \in \{(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(4,2,0),(4,2,1),(4,2,2),(4,2,3),(4,2,4)\}$.

VII.4. PROBLEME DATE LA BACALAUREAT

980. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$, unde a,b sînt două numere reale.

a) Să se determine a și b astfel încît graficul funcției f să admită ca asimptotă oblică dreapta de ecuație $y = x + 2$.

b) Pentru $a = b = 1$ să se studieze variația funcției f și să se reprezinte grafic.

c) Să se calculeze aria mulțimii mărginite de graficul funcției f determinat la punctul b), asimptota oblică și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 3$.

Soluție

a) Fie $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$; $x \in \mathbb{R}-\{1\}$. Impunem condițiile:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ și } n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = 2 .$$

Avem $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2+bx+2}{x(x-1)} = a = 1$

Scanned with OKEN Scanner

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(a-1)+x(b+1)+2}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(b+1)+2}{x-1} = b+1 = 2 \Rightarrow b = 1$$

b) Studiem, deci, funcţia $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$; $x \in \mathbb{R}-\{1\}$.

Intersecţia cu axa x'Ox: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$.

Intersecţia cu axa y'Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow A(0,-2)$.

Asimptota verticală este $x = 1$, deoarece $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = -\infty$ iar $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = +\infty$.

Asimptota oblică este dată de $y = x+2$, iar asimptota orizontală nu există, deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Derivata I-a, $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ are rădăcinile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 3$, iar derivata a II-a, $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3} \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	-				-	0	+	
f''(x)		-		-				+		+	
f(x)	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$
		concavă							convexă		

Graficul funcţiei F(x) este reprezentat pe pagina următoare.

Scanned with OKEN Scanner

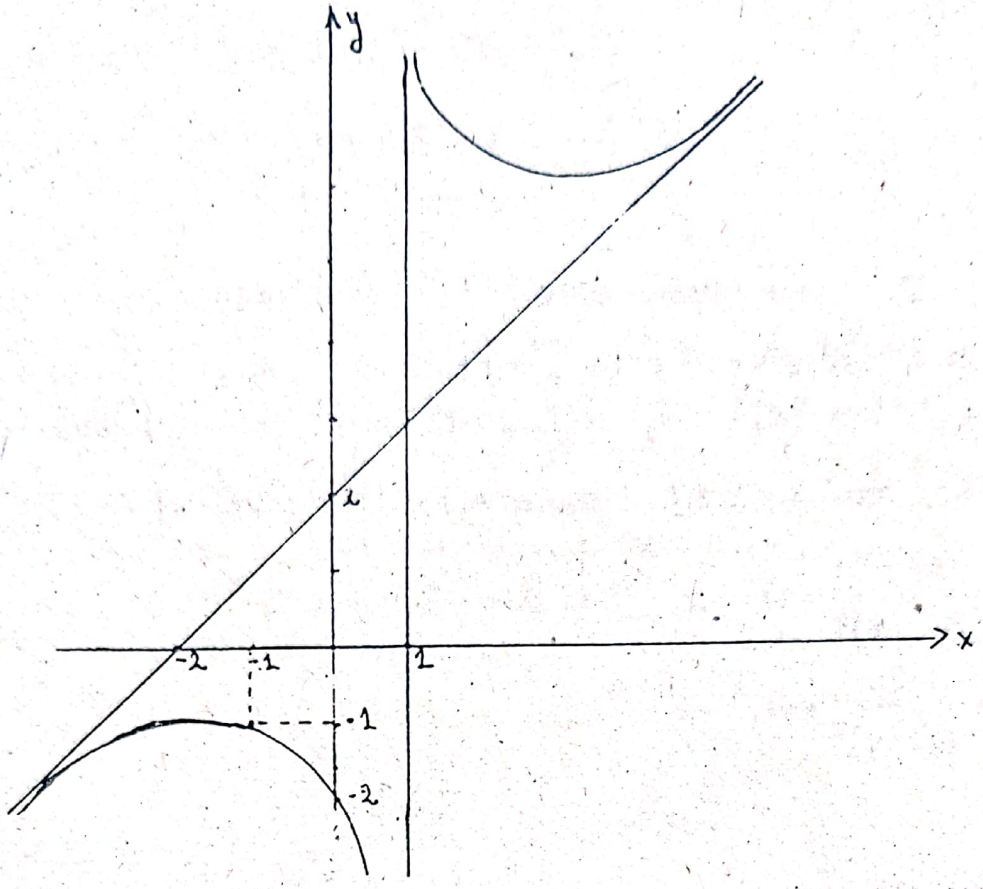


Fig. 51.

c) $$A = \int_2^3 \frac{x^2+x+2}{x-1}\,dx - \int_2^3 (x+2)\,dx = \int_2^3 \left(x+2-\frac{4}{x-1}\right)dx -$$

$$-\int_2^3 (x+2)\,dx = 4\ln|x-1|\Big|_2^3 = 4\ln 2$$

981. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-b\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{ax^2}{x+b}$, ($a>0$ şi $b>0$).

a) Să se determine a şi b astfel încît graficul lui f să admită o asimptotă paralelă cu bisectoarea întîi şi că distanţa dintre punctele de extrem ale graficului să fie egală cu $\sqrt{20}$.

b) Pentru $a=1$ şi $b=1$ să se construiască graficul funcţiei f.

c) Să se calculeze aria mulţimii mărginite de graficul funcţiei f determinat de punctul b), axa x'0x şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=4$.

Soluţie

a) Ecuaţia asimptotei are forma $y=mx+n$ cu $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a=1$.

Scanned with OKEN Scanner

$f'(x) = \frac{x(x+2b)}{(x+b)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = -2b \Rightarrow O(0,0)$ și $A(-2b,-4b)$.

$OA = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{20b^2} = |b|\cdot\sqrt{20} = \sqrt{20}$. Cum $b>0 \Rightarrow b^2 \cdot 20 = 20 \Rightarrow b = 1$.

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Domeniul maxim este $\mathbb{R}-\{-1\}$. Intersecţia cu axele dă punctul O(0,0). Dreapta $x=-1$ este asimptota verticală la $\pm\infty$ deoarece $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x) = +\infty$. Asimptotă orizontală nu avem, iar asimptota oblică este $y = x-1$, deoarece $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = -1$.

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ și } x_2 = -2.$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0.$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	|	-	0	+	
f''(x)		-		-	|		+	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
		concavă				convexă			

Graficul este reprezentat pe pagina următoare.

c) $$A = \int_1^4 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_1^4 \frac{x^2-1+1}{x+1}\,dx \int_1^4 (x-1)\,dx + \int_1^4 \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right)\Big|_1^4 = \frac{9}{2} + \ln\frac{5}{2}$$

982. I. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+4x+m)e^x$, m fiind un parametru real.

a) Să se determine m astfel încît funcţia f să admită puncte de extrem.

Scanned with OKEN Scanner

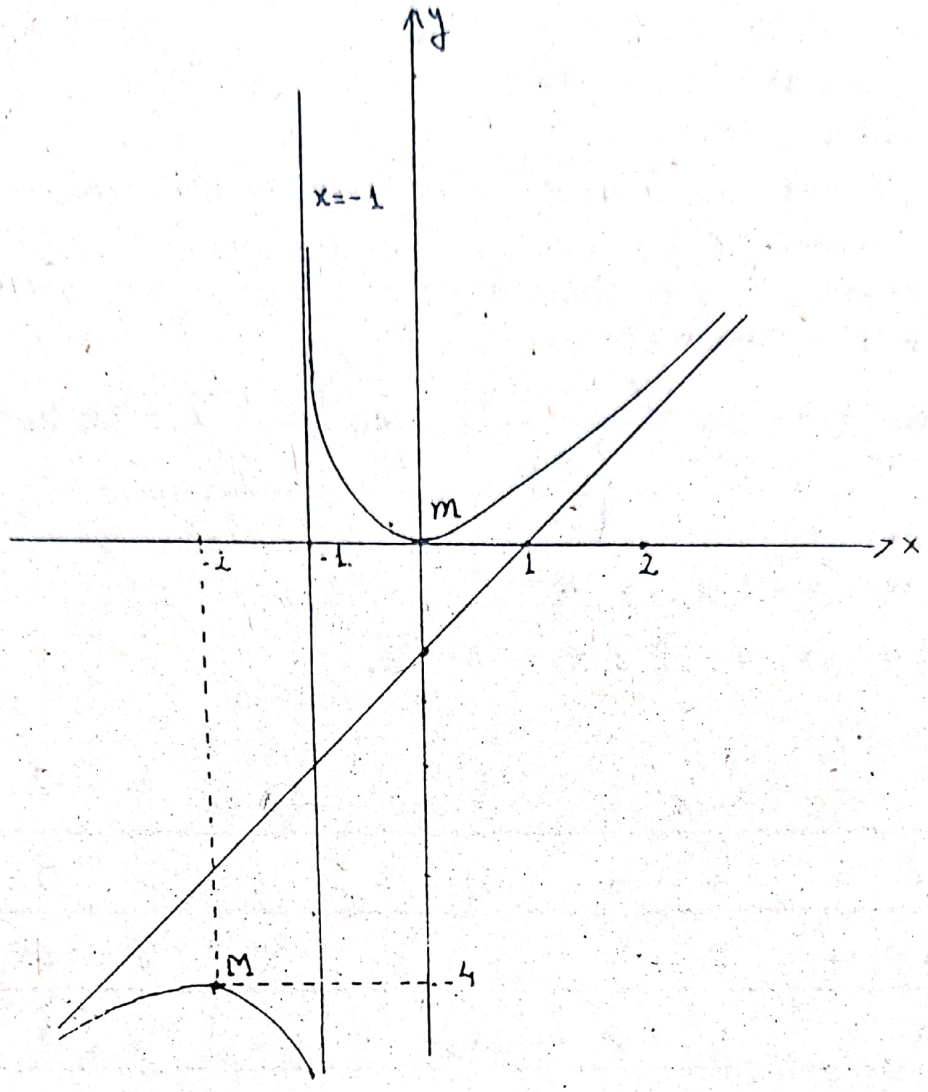


Fig. 52.

b) Pentru m = 4 să se studieze variaţia şi se se construiască graficul funcţiei f.

c) Tot pentru m = 4 să se calculeze aria mulţimii mărginite de graficul funcţiei f, graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $g(x)=e^x$ şi dreptele de ecuaţie: x = 2 şi x = 3.

II. Se consideră polinomul $f(x)=x^4+2x^2+ax^2+bx+c$ cu a, b, c, numere reale.

Să se arate că pentru a = 3 polinomul f nu poate avea toate rădăcinile reale, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

Soluţie I

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+4x+m)e^x$, $m\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=e^x(x^2+6x+m+4)$, $f'(x)=0$ şi să schimbe semnul.

Scanned with OKEN Scanner

$e^x(x^2+6x+m+4)=0 \Rightarrow x^2+6x+m+4=0$, $\Delta>0 \Rightarrow$

$\Delta=36-4(m+4)=-4m+20>0 \Rightarrow m<5$. Deci pentru $m\in(-\infty,5)$ are două puncte de extrem.

b) $m=4$, $f(x)=(x^2+4x+4)e^x=(x+2)^2\cdot e^x$. Domeniul maxim de definiţie este $\mathbb{R}$. Intersecţia cu axele ne dă punctele: A(-2,0) şi B(0,4). Asimptote orizontale şi oblice nu are. Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ deoarece:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+4x+4)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+4)'}{\left(-\frac{1}{e^x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-2$ şi $x_2=-4$

$f''(x)=0 \Rightarrow x_3=-4-\sqrt{2}$ şi $x_4=-4+\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{2}$		-4		$-4+\sqrt{2}$		-2	0	$+\infty$
f'(x)	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+
f''(x)	+	+	0	-	-	-	0	+	+		+
f(x)	0	↗	I_1	↗	$\approx 0{,}08$	↘	I_2	↘	0	↗	$+\infty$
	convexă				concavă				convexă		

Graficul este reprezentat pe pagina următoare.

c)
$$A=\int_2^3[e^x(x+2)^2-e^x]\,dx=\int_2^3 e^x(x^2+4x+3)\,dx=$$

$$=e^x(x^2+4x+3)\Big|_2^3-\int_2^3(2x+4)e^x\,dx$$

Se integrează de două ori prin părţi şi avem:

$$A=e^2(x+1)^2\Big|_2^3=e^2(16e-9)$$

Scanned with OKEN Scanner

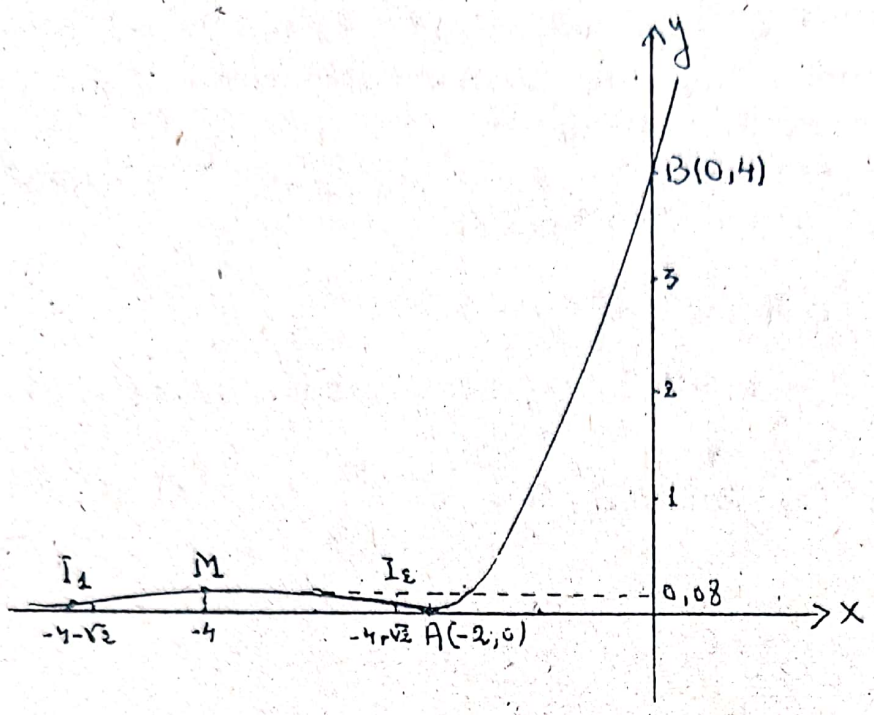


Fig. 53.

Soluţie II $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$.

$a = 3$; $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + bx + c$. Aplicăm şirul lui Rolle.

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + b$; $f''(x) = 6(2x^2 + 2x + 1)$. Dacă aplicăm şirul lui Rolle pentru f'(x) vom avea o singură variaţie de semn.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	$-\infty$	$+\infty$

deci o rădăcină reală x_0. Aplicăm şirul lui Rolle pentru f.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f	$+\infty$	$f(x_0)$	$+\infty$

Dacă $f(x_0) > 0$, nu avem nici o rădăcină reală. Pentru $f(x_0) < 0$ avem două rădăcini reale. Dacă $f(x_0) = 0$ cum $f''(x_0) \neq 0$ avem rădăcină dublă, deci maximum două rădăcini reale $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

983. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$

a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

b) Să se traseze graficul funcţiei f.

c) Să se calculeze aria porţiunii din plan determinată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

Soluţie

a) Domeniul maxim de definiţie $(0,+\infty)$.

$f'(x)=x(2\ln x+1)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Intersecţia cu axele: A(1,0).

Asimptote nu are. $f''(x)=2\ln x+3=0 \Rightarrow x_3=\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		1		$+\infty$
f'(x)		-		-	0	+			+
f''(x)		-	0	+		+			+
f(x)	0	↘	$\frac{-3}{2e^2}$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	0	↗	$+\infty$
			concavă				convexă		

c) $A=\int_1^e x^2\ln x\,dx=\dfrac{2e^3+1}{9}$

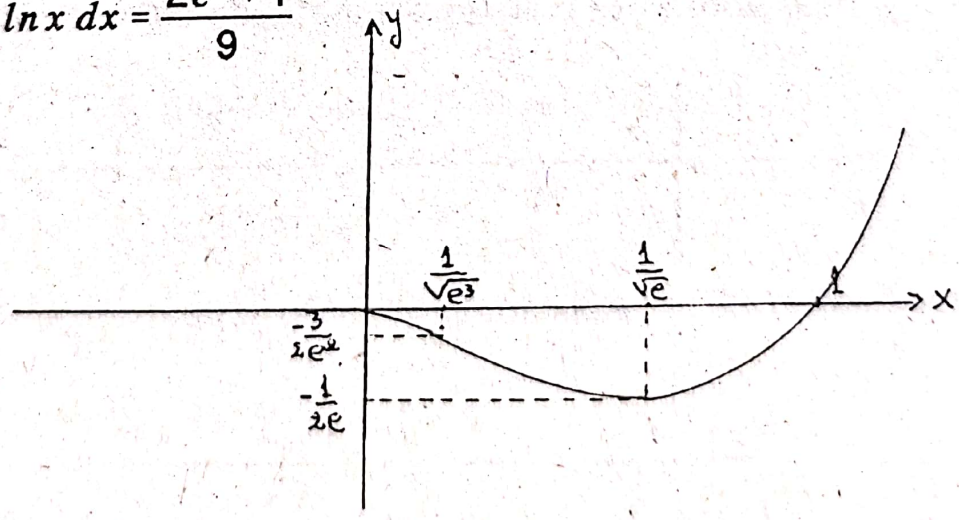


Fig. 54.

Scanned with OKEN Scanner

984. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-ln(x^2+1)$ unde m este un parametru real.

a) Să se determine m astfel încît f să fie monoton descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $m=-1$ să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția f.

c) Să se calculeze aria porțiunii din plan delimitată de graficul funcției f, axa x'x și dreptele de ecuații $x=-1$, $x=0$ pentru $m=-1$.

Soluție

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-\ln(x^2+1)$; $f'(x)=\dfrac{mx^2-2x+m}{x^2+1}$, condiție: $f'(x)\le 0$,

$mx^2-2x+m\le 0$

Condiții $\begin{cases}\Delta\le 0\\ m<0\end{cases}$, $\Delta=4(1-m^2)\Rightarrow m\in(-\infty,-1]$.

b) $f(x)=-x-ln(x^2+1)$ pentru $m=-1$. Domeniul maxim $\mathbb{R}$; intersecția cu axele, O(0,0). Asimptote verticale, orizontale și oblice nu are.

$f'(x)=-\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}\Rightarrow x_1=x_2=-1$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow x_3=-1,\ x_4=1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'(x)	-	-	0	-	-	-			-
f''(x)	+	+	0	-	-	-	0	+	+
f(x)	$+\infty$	↘	1-ln2	↘	0	↘	-1-ln2	↘	$-\infty$
		convexă			concavă			convexă	

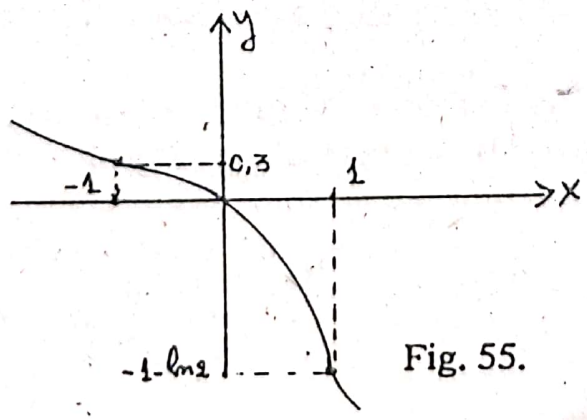


Fig. 55.

Scanned with OKEN Scanner

c)
$$A=\int_{-1}^{0}[-x-\ln(x^2+1)]\,dx=\int_{0}^{-1}[x+\ln(x^2+1)]\,dx=$$

$$=\int_{0}^{-1}x\,dx+\int_{0}^{-1}\ln(x^2+1)\,dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_{0}^{-1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$I_2=\int_{0}^{-1}\ln(x^2+1)\,dx=\int_{0}^{-1}x'\ln(x^2+1)\,dx=x\ln(x^2+1)\Big|_{0}^{-1}-$$

$$-\int_{0}^{-1}\frac{2x^2}{x^2+1}\,dx=-\ln 2-2\int_{0}^{-1}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=-\ln 2-[2x-2\operatorname{arctg}x]\Big|_{0}^{-1}=2-\ln 2-\frac{\pi}{2}$$

$$A=\frac{5-\pi-\ln 4}{2}$$

985. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{2,4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-6x+8}$ unde a şi b sînt două numere reale.

a) Să se determine a şi b astfel încît graficul funcţiei f să fie tangent axei Ox în punctul de abscisă $x=1$.

b) Pentru $a=-2$ şi $b=1$, să se studieze variaţia funcţiei f şi să se reprezinte grafic.

c) Să se calculeze aria mulţimii mărginite de graficul funcţiei f, determinat la punctul b), axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-2$ şi $x=1$.

R.

a) $f(1)=0$; $f'(1)=0\Rightarrow a=-2$, $b=1$, deci $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(x-2)(x-4)}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Graficul

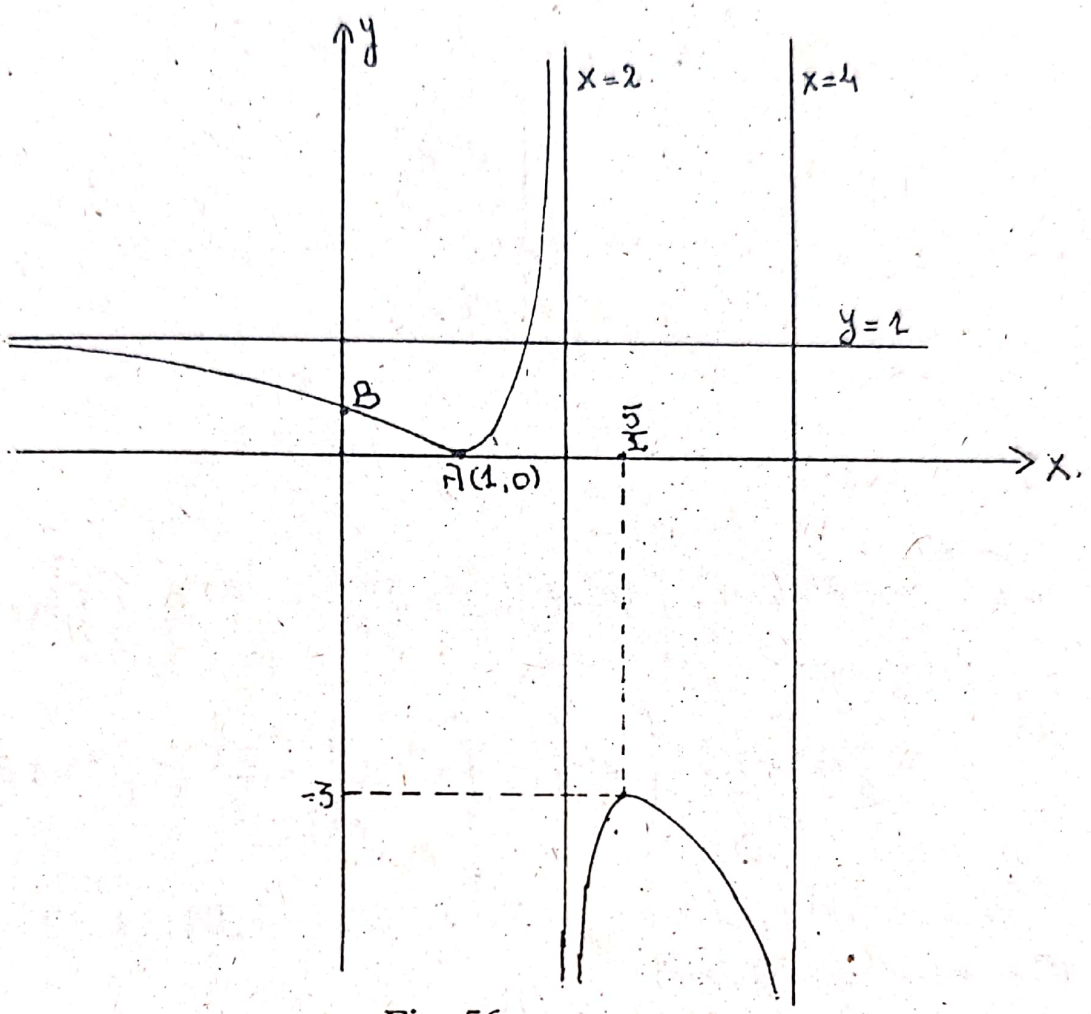


Fig. 56.

c) $A = \int_{-2}^{1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-6x+8}\,dx = \int_{-2}^{1} \left[1 + \frac{4x-7}{(x-2)(x-4)}\right] dx = 3 + ln\sqrt{\frac{1}{2^7}}$

986. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\cdot e^{|x|}$

a) Să se studieze variaţia şi să se construiască graficul funcţiei.

b) Să se calculeze volumul conului de rotaţie obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei f în jurul axei Ox, $x\in[1,3]$.

c) Să se discute după parametrul real λ numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x)=\lambda$.

d) Să se arate că $\forall x\geq 0$ avem $ln(x+1) \geq \frac{2x}{x+2}$

R.

a) Graficul este cel de la pagina următoare.

25 Com. nr. 31294

Scanned with OKEN Scanner

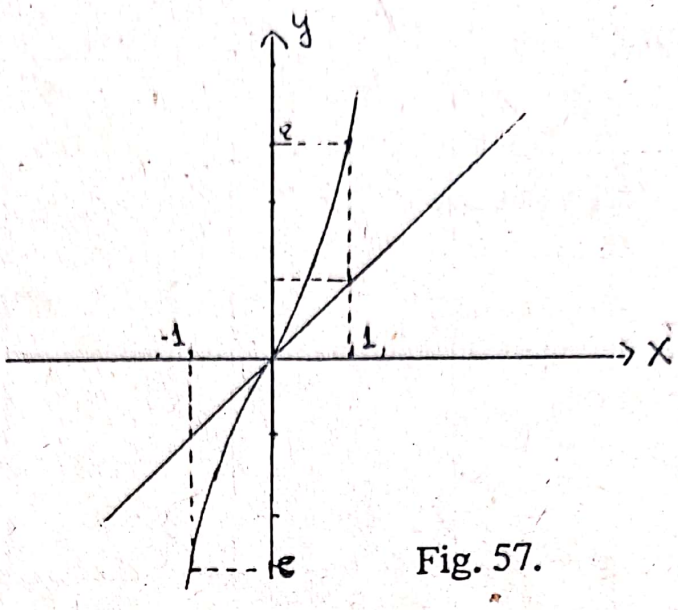


Fig. 57.

b) $$V=\pi\int_1^3 (xe^x)^2\,dx=\frac{\pi}{2}\int_1^3 x^2(e^{2x})'\,dx=\frac{\pi}{2}\left[x^2e^{2x}\Big|_1^3-2\cdot\frac{1}{2}\int_1^3 x(e^{2x})'\,dx\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x^2e^{2x}\Big|_1^3-\left(xe^{2x}\Big|_1^3-\int_1^3 e^{2x}\,dx\right)\right]=\frac{\pi e^4}{4}(13e^4-1)$$

c) $f(x)=\lambda$, $x\cdot e^{|x|}=\lambda$; $\lambda\in(-\infty,0)\Rightarrow x_1\in(-\infty,0)$; $\lambda=0\Rightarrow x_1=0$, $\lambda\in(0,+\infty)\Rightarrow x_1\in(0,+\infty)$

d) $f(x)=ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}\Rightarrow f'(x)>0$ pentru $x\geq 0$.

987. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2$

a) Să se studieze variaţia funcţiei f.

b) Să se construiască graficul funcţiei funcţiei f.

c) Să se calculeze aria mulţimii din plan, cuprinsă între graficul funcţiei f şi dreapta de ecuaţie y = 2x.

Scanned with OKEN Scanner

R.

a)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0		$-$		$-$	0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$		0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
		concavă						convexă			

b)

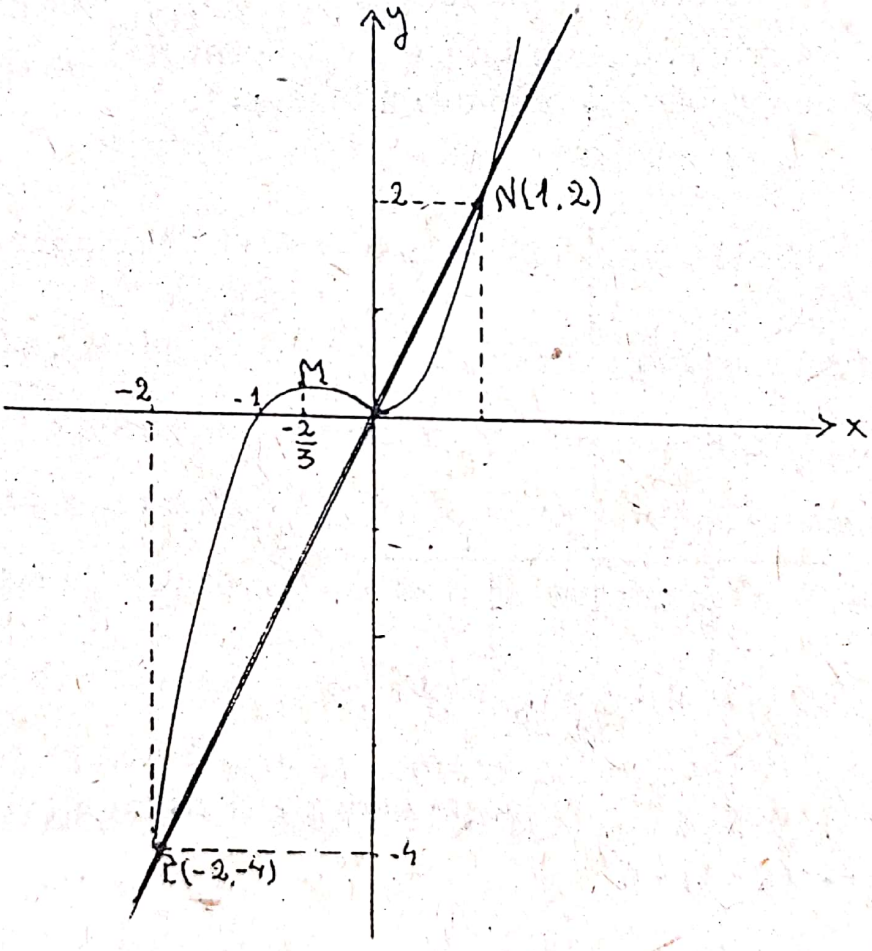


Fig. 58.

c) $\begin{cases} y = x^3 + x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow O(0,0),\ P(-2,-4),\ N(1,2),$

Scanned with OKEN Scanner

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_0^1 (2x - x^3 - x^2)\,dx + \int_{-1}^0 (x^3 + x^2)\,dx +$$

$$+ \int_{-2}^{-1} (x^2 + x^3 - 2x)\,dx = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{19}{12} = \frac{25}{12}$$

988. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$

a) Să se reprezinte grafic funcția $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$

b) Să se arate că pentru orice $x \le 0$ avem $f(x) \ge e^x - 1$

c) Să se calculeze o primitivă a funcției f.

R.

a)

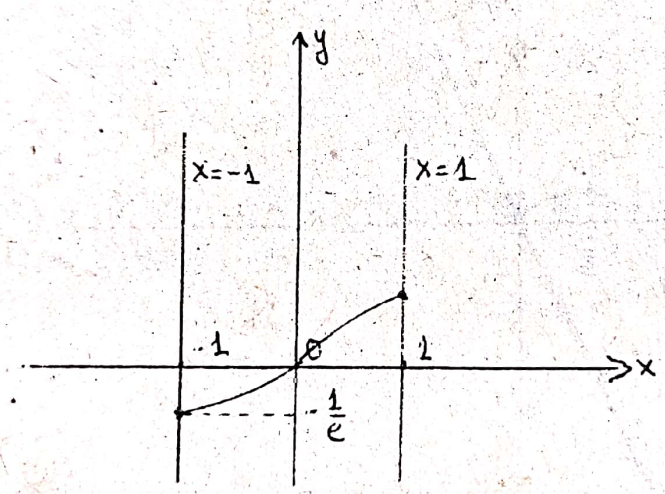


Fig. 59.

b) Notăm $h(x) = xe^x - e^x + 1$, facem derivata și găsim $h'(x) < 0$, $\forall x \le 0$

c) $\int xe^x\,dx = e^x(x-1) + C'$

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\left[\frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)\right] + C''$$

$$F(x) = \begin{cases} e^x(x-1) + C', & x \le 0 \\ 2\left[\dfrac{x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)\right] + C, & x > 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

VII.5. PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATE

989. a) Se consideră funcţia $f(x)=ln(1+|\sin x|)$. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{lnx}$.

b) Să se reprezinte grafic funcţia $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

Soluţie

a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ln(1+|\sin x|)$. Ţinînd cont de continuitatea funcţiei logaritm şi de $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0$, observăm că

$$\lim_{x\to 0} ln(1+|\sin x|)=ln(1+\lim_{x\to 0}|\sin x|)=0$$

Deoarece există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$, rezultă că există şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{lnx}=0$. Vom arăta că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nu există. Să presupunem prin absurd că ar exista $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=q$, $q\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Atunci pentru orice şir $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care tinde la $+\infty$ vom avea şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=q$. Fie $X_n=2n\pi$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Evident $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}\to\infty$ şi $f(X_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+|\sin 2n\pi|)=0$ este şir constant. Deducem că $q=0$.

Considerăm acum $y_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\to\infty$ şi $f(Y_n)=ln(1+1)=ln2$ este şir constant şi conform raţionamentului de mai sus am avea $q=\ln 2$, dar $q=0$ şi deci contradicţie şi deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nu există.

b) Fie $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. Funcţia f poate fi prelungită prin continuitate în 0 cu $f(0)=0=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. Observăm că există

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x\sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty$ deci graficul lui f are o asimptotă verticală către $+\infty$ în punctul $x=1$. Funcţia f este indefinit derivabilă pe domeniul de definiţie. Obţinem:

$$f'(x) = \frac{3-2x}{2(1-x)}\sqrt{\frac{x}{1-x}},\ \forall x \in (0,1)$$

$$f''(x) = \frac{3}{4x(1-x)^2}\sqrt{\frac{x}{1-x}},\ \forall x \in (0,1)$$

x	0		1
f'(x)	0↙	+	+
f''(x)	+	+	+
f(x)	0↙	↗	$+\infty$
		convexă	

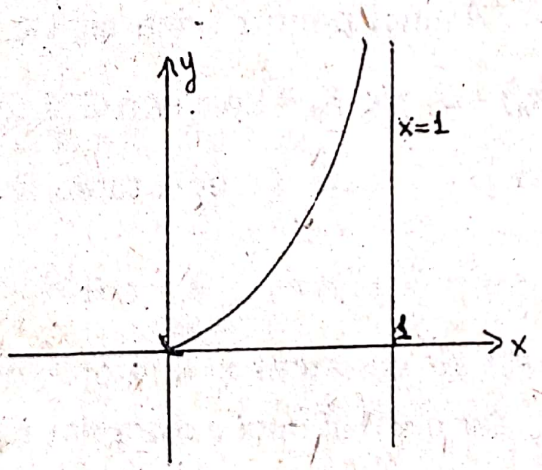


Fig. 60.

990. Se consideră f: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=3n+1$. Să se construiască o funcţie g: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel încît $g\circ f = 1_{\mathbb{N}}$. Arătaţi că, pentru orice asemenea funcţie g, are loc afirmaţia $f\circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie

Considerăm funcţia f: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=3n+1$. Se observă uşor că această funcţie este injectivă dar nu este surjectivă. Din injectivitate rezultă existenţa unei funcţii $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel ca $g\circ f=1_{\mathbb{N}}$. Într-adevăr, pentru fiecare $m\in f(\mathbb{N})$ există unic $n\in\mathbb{N}$ astfel ca $f(n)=m$ şi punem $g(m)=n$, iar în rest funcţia g poate fi definită arbitrar. Ea verifică $g\circ f=1_{\mathbb{N}}$

Observăm, de asemenea, că o astfel de funcţie g nu este unică dacă f nu este surjectivă. Facem în continuare construcţia explicită a unei funcţii g în cazul considerat în enunţ.

Fie $E=\{n\in\mathbb{N}\mid \exists\, k\in\mathbb{N}$ astfel încît $n=3k+1\}$. Deci cu notaţiile de mai sus pentru $n\in E$, $k=\dfrac{n-1}{3}$ definim funcţia g astfel:

$$g(n)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{3}, & n\in E\\ 0, & n\in\mathbb{N}-E\end{cases}.$$

Funcţia g de mai sus satisface $g\circ f=1_{\mathbb{N}}$.

Vom demonstra în continuare că pentru orice funcţie g: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel ca $g\circ f=1_{\mathbb{N}}$ avem $f\circ g\neq 1_{\mathbb{N}}$. Vom arăta acest lucru prin reducere la absurd. Dacă $f\circ g=1_{\mathbb{N}}$, atunci pentru $\forall n\in\mathbb{N}$, $(f\circ g)(n)=n$ şi $n=f(g(n))$, adică f ar fi o funcţie surjectivă. Aceasta este o contradicţie deoarece funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=3n+1$ nu este surjectivă.

991. a) Fie a şi x_0 două numere reale. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este definit astfel:

$$x_n=\frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+a},\quad \forall n\geq 1.$$

Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ în cazul în care $a>0$ şi $x_0>0$.

b) Fie funcţia f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\max(\sin x,\lambda+\cos x)$ pentru $x\in\mathbb{R}$, unde λ este un parametru real.

Să se determine valorile lui λ pentru care funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x$.

Scanned with OKEN Scanner

d) Să se reprezinte grafic funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$, pentru $x>0$.

Soluție

a) Se observă că $x_n=f(x_{n-1})$ unde $f:\mathbb{R}-\{-a\}\to\mathbb{R}$ cu $f(x)=\frac{2ax}{x+a}$ și $f'(x)=\frac{2a^2}{(x+a)^2}$. Deci $f'(x)>0$, $\forall x\neq -a$. Fie $x\in\mathbb{R}-\{-a\}$.

$f(x)>x \Leftrightarrow x\frac{a-x}{x+a}>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-a)\cup(0,a)$.

$f(x)=x \Leftrightarrow x\in\{0,a\}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2a$.

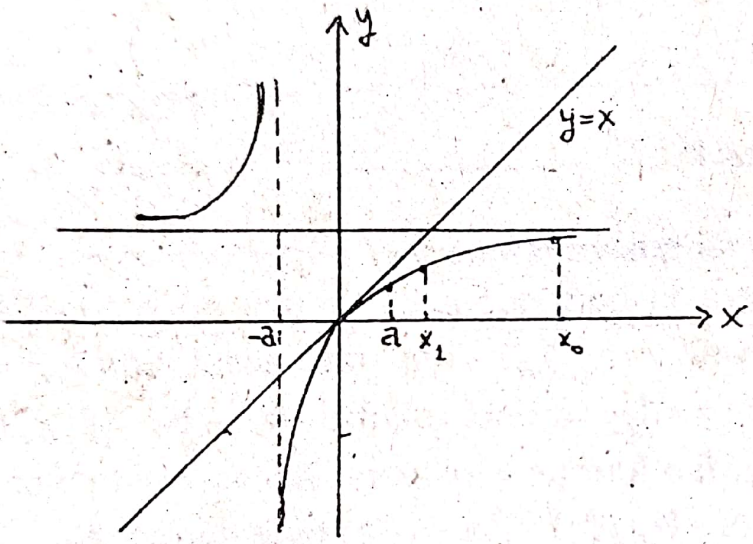


Fig. 61.

x	$-\infty$				$-a$			0		a			$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	|	+	+	2	+	$\frac{1}{2}$	+	+		
$f(x)$	2a	↗	$+\infty$	|	$-\infty$	↗	0	↗	a	↗	2a		

Cazul $x_0\in(0,a)$. Funcția f fiind crescătoare, din $0<x_0<a$ rezultă $0<f(x_0)<f(a)=a$. Deci $0<x_1<a$ și obținem $x_0<f(x_0)=x_1$. În continuare vom arăta prin inducție că $0<x_n<a$ și $x_n<x_{n+1}$, $\forall n\geq 1$. Pentru $n=1$ inegalitatea $0<x_n<a$, a fost verificată. O presupunem adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n+1$. Deoarece f este crescătoare $(0<x_n<a)$ $\Rightarrow$ $(0=f(0)<f(x_n)<f(a)=a)$. Întrucît $x_n\in(0,a)$, din $f(x)>x$, obținem $x_{n+1}=f(x_n)>x_n$. Deci șirul (x_n) este convergent.

Scanned with OKEN Scanner

Cazul $x_0 = a$. Dacă $x_0 = a$, atunci $x_n = a$, $\forall n \geq 0$.

Cazul $x_0 \in (a, +\infty)$. Se demonstrează că în primul caz că (x_n) este descrescător și $x_n > a$ $\forall n \geq 0$. Deci și în acest caz șirul este convergent. Fie $\alpha = \lim\limits_{x \to \infty} x_n$. Trecînd la limită în relația $x_n = f(x_{n-1})$, obținem $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha(\alpha - a) = 0$. Din cele de mai sus se constată că $\alpha = a$.

b) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$. Plecînd de la definiția derivabilității unei funcții într-un punct se constată că următoarele afirmații sînt adevărate:

Dacă $f(x_0) \neq 0$, funcția $x \mapsto f(x)$ este derivabilă în x_0. Dacă $f(x_0) = 0$ și există un interval deschis V care conține punctul x_0 și $f(x_0) \neq 0$, $\forall x \in V$, atunci $x \mapsto |f(x)|$ este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă $f'(x_0) = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \lambda + \cos x + |\sin x - \lambda - \cos x|) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x + \lambda + \cos x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right]$$

Dacă $\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} > 1$, atunci $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ nu se anulează pe $\mathbb{R}$ și deci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Deci $|\lambda| > \sqrt{2} \Rightarrow$ f derivabilă pe $\mathbb{R}$. Dacă $\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} < 1$ ecuația $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 0$ are ca soluții punctele

$$x_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + n\pi$$

Fie $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, $g'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. f este derivabilă în x_n dacă și numai dacă $\cos\left[(-1)^n \arcsin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + n\pi\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$

$$(-1)^n \cos\left(\arcsin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow \arcsin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow$$

$|\lambda| = \sqrt{2}$. Deci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $|\lambda| \geq \sqrt{2}$.

c) Avem nedeterminare de forma 1^∞.

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x} = \infty.$$

d) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in(0,1)\\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x-2}{2x\sqrt{x}}, & x\in(0,1)\\ \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ $\qquad$ $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{8-3\ln x}{4x^2\sqrt{x}}, & x\in(0,1)\\ \dfrac{-8+3\ln x}{4x^2\sqrt{x}}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$

Întrucît $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, f admite ca asimptotă dreapta $y=0$.

x	0		1		e^2		$e^{\frac{8}{3}}$	$+\infty$
f'(x)	-	-1	|	1	+	0	-	-	-
f''(x)	+	+	|	-	-	-	0	+
f(x)	∞	↘	0,	↗	$\frac{2}{e}$	↘		↘
	convexă				concavă			convexă

e^2 punct de maxim pentru f și $e^{\frac{8}{3}}$ punct de inflexiune. A(1,0) punct unghiular al graficului funcției f.

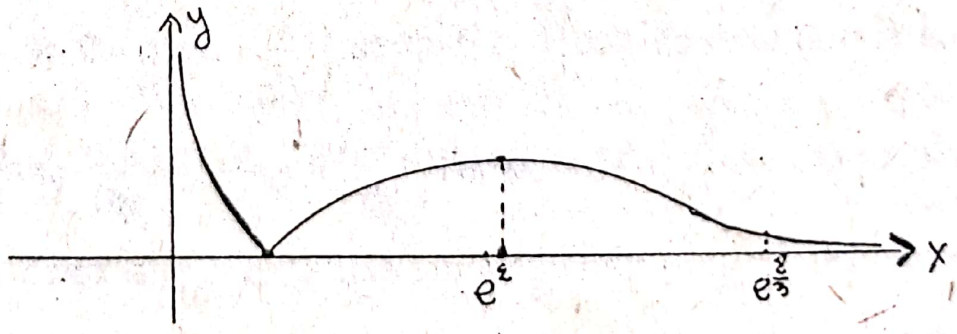


Fig. 62.

Scanned with OKEN Scanner

992. Se consideră funcţia $f(x) = \cos x \cdot \sin 2x$. Să se arate că $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) > -\frac{7}{9}$

Soluţie

Funcţia se mai poate scrie:

$f(x) = \cos x \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2\cos^2 x \cdot \sin x = 2\sin x - 2\sin^3 x$, de unde

$f'(x) = 2\cos x(1 - 3\sin^2 x) = o \Rightarrow \cos x = 0$ sau $\sin^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ sau $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Dacă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, din condiţia $x \in [-\pi, \pi]$, rezultă că $x = \pm\frac{\pi}{2}$ şi $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0 > -\frac{7}{9}$.

Dacă $x \in [-\pi, \pi]$ verifică ecuaţia $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, atunci

$f(x) = 2\sin x - 2\sin^3 x = 2\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\frac{3\sqrt{3}}{27} = 2\left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{9}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}$.

Dacă $x \in [-\pi, \pi]$ verifică ecuaţia $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ atunci

$f(x) = -2\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\frac{3\sqrt{3}}{27} = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$; dar $-4\frac{\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}$, deoarece inegalitatea este echivalentă cu $4\sqrt{3} < 7$ sau $48 < 49$. Deci şi în acest caz $f(x) > -\frac{7}{9}$.

Deoarece punctele de minim ale funcţiei derivabile f se află printre rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$, am verificat că $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}$.

993. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)$, $k \in \mathbb{N}$

Soluţie

Scanned with OKEN Scanner

$$n^k\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)=n^k\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n+2}{n+3}}{\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}}\cdot\frac{n^k}{(n+1)(n+3)}$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)=2.$

Pe de altă parte avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)(n+3)}=\begin{cases}0, \text{ dacă } k\in\{0,1\}\\ 1, \text{ dacă } k=2\\ \infty, \text{ dacă } k>2\end{cases}$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}n^k\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)=\begin{cases}0, \text{dacă } k\in\{0,1\}\\ -1, \text{dacă } k=2\\ -\infty, \text{dacă } k>2\end{cases}$

Problema are sens pentru $k\in\mathbb{R}$, obţinîndu-se aceleaşi limite.

994. Fie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel încît $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ şi fie $a>0$ un număr fixat. Aplicînd teorema lui Lagrange funcţiei f pe fiecare interval $[a+n,a+n+1]$, $n\geq 0$, $n\in Z$, să se arate că există un şir $n_n\to\infty$ asfel încît $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}f'(x_k)=-f(a)$

Soluţie Se alege $x_n\in(a+n,a+n+1)$ astfel încît să verifice formula lui Lagrange: $\frac{f(a+n+1)-f(a+n)}{a+n+1-a-n}=f(a+n+1)-f(a+n)=f'(x_n).$

Atunci:

$$\sum_{k=0}^{n}f'(x_k)=[f(a+1)-f(a)]+[f(a+2)-f(a+1)]+\ldots+$$
$$+[f(a+n)-f(a+n-1)]+[f(a+n+1)-f(a+n)]=f(a+n+1)-f(a)$$

Dar $\lim\limits_{n\to}f(a+n+1)=0$ conform ipotezei, deci

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f'(x_k)=\lim\limits_{n\to\infty}[f(a+n+1)-f(a)]=-f(a)$. Î n p l u s , d i n $a+n<x_n<a+n+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}(a+n)=+\infty$, deci $x_n\to+\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

995. Să se arate că curbele $y = \sin^n x (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ au cîte un punct de inflexiune $N_n(x_n, y_n)$ în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Soluție $y' = n \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x$;

$y'' = n[(n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x - \sin^n x] = n \cdot \sin^{n-2} x (n\cos^2 x - 1)$.

Rezultă că $x_n = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ este rădăcină pentru y" în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, iar derivata y" are semne contrare în jurul acestui punct, deci x_n este punct de inflexiune pentru y.

Avem $y_n = y(x_n) = \left[\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Deci $N_n\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}, \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$. Rezultă ușor că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^{-\frac{1}{2}}$.

996. Fie $f:[0,1]\to[0,1]\cup[2,3]$ o funcție continuă astfel încît $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Să se arate că:

a) f nu este surjectivă
b) f nu este strict crescătoare
c) f nu este injectivă

R.

a) f continuă → f are proprietatea lui Darboux, deci $f([0,1]) = I \subseteq [0,1]$. Cum f conține și intervalul [2,3] unde nu există valori ale lui f ⇒ f nu poate fi surjectivă.

b) Dacă f este strict crescătoare ⇒ $0 = f\left(\frac{1}{2}\right) > f(0)$, dar f nu ia valori negative, contradicție.

c) Se presupune prin absurd că f este injectivă. Cum f are proprietatea lui Darboux ⇒ $\exists y_1 \in \left(x_1, \frac{1}{2}\right)$ cu $f(y_1) = \frac{a}{2}$. $\exists y_2 \in \left(\frac{1}{2}, x_2\right)$ cu $f(y_2) = \frac{a}{2}$, deci $f(y_1) = f(y_2)$ și $y_1 \neq y_2$. Contradicție (am presupus că $0 \leq x_1 < \frac{1}{2} < x_2 \leq 1$, iar $a = \min(f(x_1), f(x_2))$.

Scanned with OKEN Scanner

997. Se consideră şirul cu termenul general:
$a_n = \ln(1+n) + a \cdot \ln(2+n) + b \cdot \ln(3+n)$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine relaţia dintre a şi b astfel încît şirul $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ să aibă limita zero.

b) Presupunînd că $a+b+1=0$, să se determine a şi b astfel încît şirul cu termenul general $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ să fie convergent şi să i se afle limita.

R.

a) Se scrie $a_n = (1+a+b)\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + a\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$.

Trebuie ca $1+a+b=0$.

b) $b_n = \ln 6 + a\cdot\ln 3 + (a+2b)\ln n + (a+b)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + b\cdot\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-2,\ b=-1$$

deci $b_n = \ln 6 - 2\ln 3 - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$. Şirul este convergent şi are limita $b = \ln\frac{2}{3}$.

998. Se consideră un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale astfel încît, pentru $\forall n$, are loc relaţia $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$.

Să se arate că dacă $x_1 \le x_2$, atunci:

a) Şirul $(X_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător, iar şirul $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

b) Pentru $\forall n$ are loc relaţia $|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{2^n}$.

c) Pentru $\forall n$ are loc relaţia $2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1$.

d) Să se deducă că şirul $(4x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi are limita egală cu $\frac{x_1 + 2x_2}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

R.

a) Se arată prin inducţie după n, că $x_{2n-1} \le x_{2n}$, $\forall n \ge 1$.

b) Prin inducţie.

c) Se aplică relaţia din ipoteză de n ori consecutiv şi se obţine

$$2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_{n+1} + x_n = 2x_n + x_{n-1} = \ldots = 2x_2 + x_1$$

d) Se aplică relaţiile de la c) şi b) şi se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \dfrac{2x_2 + x_1}{3}$.

999. Fie f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

Să se calculeze suma $S_n(x) = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ pentru $x \in (0,1)$, folosind derivatele funcţiei f.

R. Observăm că $f(x) = 1 + x + \ldots + x^n = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}, & x \ne 1 \\ n+1, & x = 1 \end{cases}$ şi deci

$$f'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}(x-1) - (x^n-1)}{(x-1)^2}, & x \ne 1 \\ \dfrac{n(n+1)}{2}, & x = 1 \end{cases}, \text{ iar}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + \ldots + n(n-1)x^{n-2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n^2+n)x^{n-1}(x-1)^2 - 2nx^n(x-1) + 2(x^n-1)}{(x-1)^3}, & x \ne 1 \\ \dfrac{n(n^2-1)}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

Pe de altă parte $xf'(x) = x + 2x^2 + \ldots + nx^n$ şi prin derivare găsim

$$S_n(x) = f'(x) + xf''(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{2k-1} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \begin{cases} \dfrac{(n^2+2n)x^n(x-1)^2 - 2nx^{n+1}(x-1) + (x^n-1)(x+1)}{(x-1)^3}, & \text{pentru } x \neq 1 \\ \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

Pentru $x \in (0,1)$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$.

1000. Se dă funcţia f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de legea: $f(x) = x|x-a| + |x-b|$. Să se determine a, b astfel încît să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

R. Presupunem că a<b.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + (a-1)x + b, & x < a \\ b - a, & x = a \\ x^2 - (a+1)x + b, & x \in (a,b) \\ b(b-a), & x = b \\ x^2 - (a-1)x - b, & x > b \end{cases}$$

f este derivabilă pe $(-\infty,a)\cup(a,b)\cup(b,+\infty)$ fiind exprimată pe această mulţime prin funcţii elementare. Să cercetăm derivabilitatea lui f în punctele x=a şi x=b.

$$f_s'(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{-x^2 + (a-1)x + b - b + a}{x-a} = -a-1$$

$$f_d'(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{x^2 - (a-1)x + b - b + a}{x-a} = a-1$$

Însă $f_s'(a) = f_d'(a) \Rightarrow -a-1 = a-1 \Rightarrow a = 0$.

Deci pentru a=0, f derivabilă în x=a=0, $f_s'(b) = 2b-a-1$ şi $f_d'(b) = 2b-a+1$.

Deoarece $\forall\, b \in \mathbb{R}$, $f_s'(b) \neq f_d'(b)$ rezultă că în x=b, funcţia f nu este derivabilă. Dacă a=b atunci $f(x) = (x+1)|x-a|$, deci

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+(a-1)x+a, & x<a\\ 0, & x=a\\ x^2-(a-1)x-a, & x>a\end{cases}$$

$f_s'(a)=-a-1$, $f_d'(a)=a+1$, $f_s'(a)=f_d'(a)\Rightarrow a=-1$. În concluzie f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de legea $f(x)=(x+1)|x+1|$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

1001. a) Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$, $b_k=\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $k=1,2,\ldots,n$ iar dacă acest şir este convergent să i se calculeze limita.

b) Să se determine valorile maxime şi valorile minime ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-2)^2+4}{x^2+4}}$

R.

Avem relaţia $b_k=\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2}$, k=1,2,...,n.

Rezultă $a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$. Şirul este convergent deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

b) Derivata funcţiei f(x) este $f'(x)=\dfrac{2(x^2-2x-4)}{(x^2+4)^2}\sqrt{\dfrac{(x-2)^2+2}{x^2+4}}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ cu rădăcinile $x_1=\sqrt{5}$ şi $x_2=1+\sqrt{5}$.

Făcînd un tabel de variaţie se obţine valoarea maximă $f(1-\sqrt{5})=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ iar valoarea minimă $f(1+\sqrt{5})=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Altă metodă: notăm f(x)=m≥0, $\dfrac{(x^2-2)^2+4}{x^2+4}=m^2\Rightarrow$

$(1-m^2)x^2-4x+4(2-m^2)=0$.

Deoarece $x\in\mathbb{R}$ rezultă $\Delta\geq 0$, adică $m^4-3m^2+1\leq 0$, cu $m\in\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Anexă

NOŢIUNI TEORETICE

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

I.1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

Prin literele p, q, r convenim să notăm propoziţii oarecare cu proprietatea de a fi adevărate sau false şi vom scrie $V(p)=A$ (respectiv $V(p)=F$) pentru a exprima că p este o propoziţie adevărată (respectiv falsă).

Propoziţiile se pot compune cu ajutorul conectorilor logici:

a) "non" reprezentînd negaţia;
b) "sau" notat cu $\vee$ reprezentînd disjuncţia;
c) "şi" notat cu $\wedge$ reprezentînd conjuncţia;
d) "dacă ... atunci" notat cu $\Rightarrow$ reprezentînd implicaţia;
e) "dacă şi numai dacă" notat cu $\Leftrightarrow$ reprezentînd echivalenţa.

Prin definiţie avem: Negaţia unei propoziţii adevărate este o propoziţie falsă, iar negaţia unei propoziţii false este o propoziţie adevărată; disjuncţia a două propoziţii este o propoziţie falsă, în mod unic, cînd ambele propoziţii sînt false; conjuncţia a două propoziţii este o propoziţie adevărată, în mod unic, cînd ambele propoziţii sînt adevărate; implicaţia a două propoziţii este o propoziţie falsă, în mod unic, cînd prima propoziţie este adevărată şi a doua falsă; echivalenţa a două propoziţii este o propoziţie adevărată în două cazuri, cînd ambele propoziţii sînt fie adevărate, fie false.

Cele cinci operaţii logice pot fi rezumate în următorul tabel:

		Negaţia "non"	Disjuncţia "sau"	Conjuncţia "şi"	Implicaţia "dacă...atunci"	Echivalenţa "dacă şi numai dacă"
p	q	non p	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
A	A	F	A	A	A	A
A	F	F	A	F	F	F
F	A	A	A	F	A	F
F	F	A	F	F	A	A

Observaţie: Propoziţia $p \Rightarrow q$ are aceeaşi valoare de adevăr ca şi propoziţia non $p \vee q$ şi avem $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{non } p \vee q)$.

În logica matematică avem doi cuantificatori:

a) Cuantificatorul universal $\forall$ care se citeşte "ori care ar fi" şi
b) Cuantificatorul existenţial $\exists$ care se citeşte "există".

Scanned with OKEN Scanner

Predicatul reprezintă un enunţ, care depinde de una sau mai multe variabile şi are proprietatea că pentru orice valori date variabilelor corespunde o propoziţie adevărată sau falsă.

Exemple:

a) $p(x): x-3=9$, este un predicat unar, $(x \in \mathbb{N})$

b) $p(x,y): 2x+y=5$, reprezintă un predicat binar, $(x, y \in \mathbb{R})$

c) $p(x,y,z): x+y=z$, reprezintă un predicat ternar. $(x,y,z \in R)$

Cei doi cuantificatori se scriu întotdeauna în faţa unui predicat.

Aplicarea logicei matematice în raţionamentele matematice.

Pentru a demonstra că o teoremă este adevărată ne folosim de unul, sau mai multe din următoarele raţionamente matematice:

a) Raţionamentul prin deducţie

"Dacă propoziţia p este adevărată şi dacă propoziţia $(p \Rightarrow q)$ este adevărată, atunci propoziţia q este adevărată."

Putem avea scheme de deducţie mai complicate, spre exemplu: "Dacă propoziţia p este adevărată şi propoziţia $(p \Rightarrow q)$ este adevărată şi propoziţia $(q \Rightarrow r)$ este adevărată şi propoziţia $(r \Rightarrow s)$ este adevărată, atunci propoziţia s este adevărată."

b) Raţionamentul prin implicaţie contrapusă

"A demonstra că propoziţia $(p \Rightarrow q)$ este adevărată este echivalent cu a demonstra că contrapusa $nonq \Rightarrow nonp$ este adevărată. Aceasta se scrie: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (nonq \Rightarrow nonp)$

c) Raţionamentul prin absurd

"Dacă propoziţia $[(nonq) \Rightarrow p]$ este adevărată şi p este falsă, atunci q este adevărată."

d) Raţionamentul prin disjuncţie de caz

"Dacă propoziţia (nonp) este adevărată şi propoziţia $[(nonp) \Rightarrow q]$ este adevărată, atunci propoziţia q este adevărată."

e) Raţionamentul prin recurenţă

"Fie p(n) o propoziţie definită pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ şi $k_0, k, n \in \mathbb{N}$. Dacă $p(k_0)$ şi p(k) şi $(p(k) \Rightarrow p(k+1))$ sînt adevărate $(k > K_0)$ atunci p(n) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$."

f) Raţionamentul prin negaţie (contra-exemplul)

"Pentru a demonstra că o propoziţie p este falsă este echivalent cu a demonstra că negaţia sa este o propoziţie adevărată." De exemplu $non[(\forall x \in E)p(x)] \Leftrightarrow [(\exists x \in E)\ nonp(x)]$

g) Raţionamentul prin echivalenţe succesive

"Dacă propoziţia $(p \Leftrightarrow q)$ este adevărată şi propoziţia $(q \Leftrightarrow r)$ este adevărată şi $(r \Leftrightarrow s)$ este adevărată, atunci propoziţia $(p \Leftrightarrow s)$ este adevărată."

Scanned with OKEN Scanner

Exemple de reguli de negare:

a) $non(\exists x)(\exists y)p(x,y)\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)\ nonp(x,y)$

b) $non(\exists x\in\mathbb{Z})(x-2=3)\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{Z})(x-2\neq 3)$

c) $non(\forall x\in\mathbb{N})(x<4)\Leftrightarrow(\exists x\in\mathbb{N})(n\geq 4)$.

I.2. MULȚIMI

Dacă A este o submulțime a mulțimii E și $x\in E$ vom scrie $x\in A$ (respectiv $x\notin A$) pentru a exprima că x este (respectiv nu este)element al lui A și vom citi "x aparține lui A" (respectiv "x nu aparține lui A"). O mulțime A este inclusă în mulțimea B dacă orice element din A este și element din B. Vom scrie $A\subseteq B$ (respectiv $A\subsetneq B$) pentru a exprima că A este submulțime a lui B (respectiv submulțime a lui B dar $A\neq B$). Pentru a arăta că două mulțimi A și B sînt egale se verifică "dubla incluziune", adică $A=B\Leftrightarrow(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$.

Dacă $A\subseteq B$ se spune că A este o submulțime sau o parte a lui B. În continuare, fixăm o mulțime E și notăm cu P(E) mulțimea părților lui E pe care definim următoarele operații.

Dacă $A,B\in P(E)$ definim:

Reuniunea $A\cup B=\{x\in E\ /\ (x\in A)\vee(x\in B)\}$.

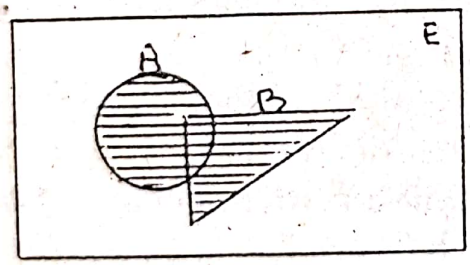


Fig. 63.

Dacă A reprezintă mulțimea punctelor din cerc, iar B reprezintă mulțimea punctelor din triunghi atunci $A\cup B$ reprezintă mulțimea hașurată.

Intersecția $A\cap B=\{x\in E\ /\ (x\in A)\wedge(x\in B)\}$.

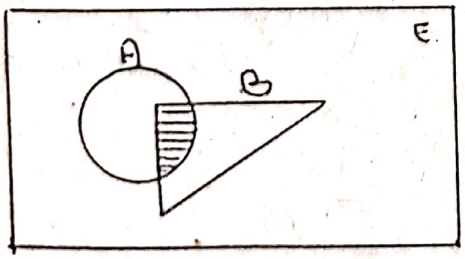


Fig. 64.

Scanned with OKEN Scanner

Diferența $A-B=\{x\in E \mid (x\in A)\wedge(x\notin B)\}$.

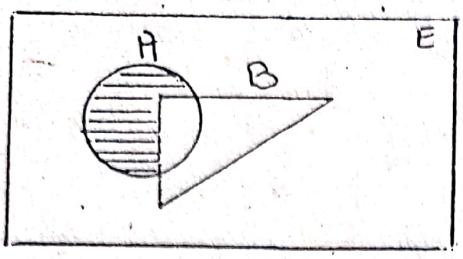


Fig. 65.

Diferența simetrică $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$ sau $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$.

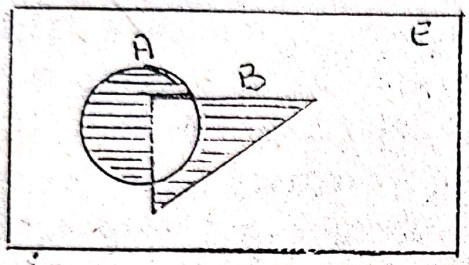


Fig. 66.

Mulțimi complementare

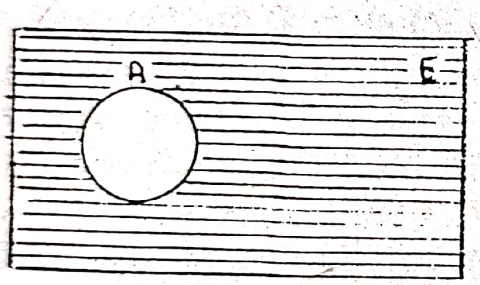


Fig. 67.

$C_E A=E-A,\ A\subset E$
$C_E\varnothing=E,\ C_E E=\varnothing$
$C_E A$ se mai notează cu $\bar{A}$.

Produsul cartezian $A\times B=\{(x,y)\in E \mid (x\in A)\wedge(y\in B)\}$.

Observație: Operațiile precedente se extind la mulțimi care să nu fie submulțimi ale unei anumite mulțimi.

Funcția caracteristică a unei mulțimi.

Fie $A\subseteq E$. Numim funcție caracteristică a unei mulțimi A, funcția

$$f_A: E\to\{0,1\},\ f_A=\begin{cases}1 \text{ dacă } x\in A\\ 0 \text{ dacă } x\notin A\end{cases}$$

Proprietățile funcției caracteristice:

a) Dacă $A,B\subseteq E$ atunci $f_A=f_B\Leftrightarrow A=B$

b) $f_{A\cap B}=f_A\cdot f_B$

c) $f_{A\cup B}=f_A+f_B-f_A\cdot f_B$

d) $f_{\bar{A}}=1-f_A$

Scanned with OKEN Scanner

e) $f_A^k = f_A$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Unele proprietăţi ale operaţiilor cu submulţimi ale unei mulţimi date, sau egalitatea a două mulţimi se verifică uşor folosind noţiunea de funcţie caracteristică.

Mulţimile numerice care se întîlnesc cel mai adesea în matematică sînt:

Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$, $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$.

Mulţimea numerelor întregi $Z=\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$. $Z^*=Z-\{0\}$; $Z=Z_+\cup Z_-=Z_-^*\cup\{0\}\cup Z_+^*$ unde $Z_-=\{\ldots,-3,-2,-1,0\}$, $Z_+=\{0,1,2,3,\ldots\}=\mathbb{N}$; $\mathbb{N}\subset Z$.

Mulţimea numerelor raţionale $Q=\left\{x=\frac{p}{q} \mid p,q\in Z,\ q\neq 0\right\}$; $Q^*=Q-\{0\}$. $Q=Q_-\cup Q_+=Q_-^*\cup\{0\}\cup Q_+^*$; $\mathbb{N}\subset Z\subset Q$.

Mulţimea numerelor iraţionale notată cu $I=\mathbb{R}-Q$

$I=\{\ldots \pm\sqrt{2};\ 1-\sqrt[3]{7};\ 2\pi-5;\ \sqrt[12]{2}-6;\ldots\}$ $x\in I\Leftrightarrow \nexists p,q\in Z$ încît $x=\frac{p}{q}$

$I=I_-\cup I_+$; $I\cap Q=\varnothing$.

Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}=Q\cup I=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+=\mathbb{R}^*\cup\{0\}\cup\mathbb{R}_+^*$.

Mulţimea numerelor complexe C, $C=\{z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$

Au loc următoarele incluziuni: $\mathbb{N}\subset Z\subset Q\cup I=\mathbb{R}\subset C$.

Un caz particular de mulţimi reprezintă intervalele din $\mathbb{R}$. Avem următoarele tipuri de intervale:

a) Interval deschis: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ sau
$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid x=(1-\lambda)a+\lambda b,\ 0<\lambda<1\}$

b) Interval închis: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$ sau
$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid x=(1-\lambda)a+\lambda b,\ 0\leq\lambda\leq 1\}$

c) Interval deschis la stînga şi închis la dreapta: $(a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$

d) Interval închis la stînga şi deschis la dreapta: $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$

Alte tipuri de intervale:

$\mathbb{R}_-=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq 0\}=(-\infty,0]$

$\mathbb{R}_-^*=(-\infty,0)$

$\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}=[0,+\infty)$

$\mathbb{R}_+^*=(0,+\infty)$

Scanned with OKEN Scanner

I.3. INEGALITĂȚI

Pe mulțimea $\mathbb{R}$, a numerelor reale este fixată o relație de ordine, notată "$\leq$", care posedă proprietățile următoare:

a) Reflexivitate: $(\forall x \in \mathbb{R})$, $x \leq x$;

b) Antisimetrie: $(\forall x, y \in \mathbb{R})$, $(x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y)$

c) Tranzitivitate: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$, $(x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z)$

În plus "$\leq$" este o relație de ordine totală adică: $(\forall x, y \in \mathbb{R})$, $(x \leq y$ sau $y \leq x)$

1. Inegalitatea lui Bernoulli:

a) $(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $(1 + a)^\alpha \geq 1 + \alpha \cdot a$, $\forall a \in R$, $a \geq -1$, $\forall \alpha \in R$, $\alpha \geq 1$

c) $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$; $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq -1$, toate aceste numere avînd același semn.

2. Inegalitatea mediilor:

$$\min_{i=\overline{1,n}} a_i \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n} \leq$$

$$\leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \max_{i=\overline{1,n}} a_i$$

cu a_i, $i = \overline{1,n}$ numere reale strict pozitive. Inegalitățile devin egalități numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. ($H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + a_n}$ reprezintă media armonică, $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n}$ media geometrică iar $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ media aritmetică).

3. Inegalitatea lui Cauchy:

Inegalitatea devine egalitate pentru $a_i = \lambda b_i$, $\lambda \in R$, $i = \overline{1,n}$.

Scanned with OKEN Scanner

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots +$

$a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$, $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$

În altă scriere avem: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$.

4) Inegalitatea lui Minkowski:

a)

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

$\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sau $\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

b) $\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $p > 1$

c) $\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $0 < p < 1$

d)

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}_+, \ i = \overline{1,n}$$

5. Inegalităţile lui Hölder pentru sume diferite:

a)

$$|a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_{nb_n}| \leq (\,|a_1|^p + |a_2|^p + \ldots$$

$$+ |a_n|^p\,)^{\frac{1}{p}} \cdot (\,|b_1|^q + |b_2|^q + \ldots + |b_n|^q\,)^{\frac{1}{q}}$$

$\forall a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ şi $1 < p < \infty$, iar q se deduce din $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

sau: $\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

b) $\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\forall b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ şi $0 < p < 1$, iar q se deduce din $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Inegalitatea se transformă în egalitate pentru $|a_i|^p = \lambda |b_i|^q$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,n}$.

6) Inegalitatea lui Cebîşev

Dacă $(a_k)_{1\le k\le n}$ este un şir finit de numere pozitive monoton crescător, iar $(b_k)_{1\le k\le n}$ este un şir finit de numere pozitive monoton descrescător, atunci avem: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$, excepţie făcînd cazul în care $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ sau $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, cînd inegalitatea devine egalitate. Dacă ambele şiruri sînt sau monoton crescătoare sau monoton descrescătoare, atunci avem:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \ge \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

7) Inegalitatea lui Arhimede:

$$\frac{n^2 h}{2} < h + 2h + 3h + \ldots + nh < \frac{(n+1)^2 h}{2},\ h > 0,\ n \ge 1$$

8) Inegalitatea lui Jensen:

Fie E un interval şi $f: E \to \mathbb{R}$. Dacă f este convexă ($f''(x) \ge 0$) pe E atunci oricare ar fi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ şi oricare ar fi numerele pozitive $m_1, m_2, \ldots, m_n$, nu toate nule, se verifică inegalitatea:

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right) \le \frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \ldots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Altă formă a inegalităţii lui Jensen:

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ convexă şi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ cu $p_i \ge 0$; $i = \overline{1,n}$, atunci

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

Scanned with OKEN Scanner

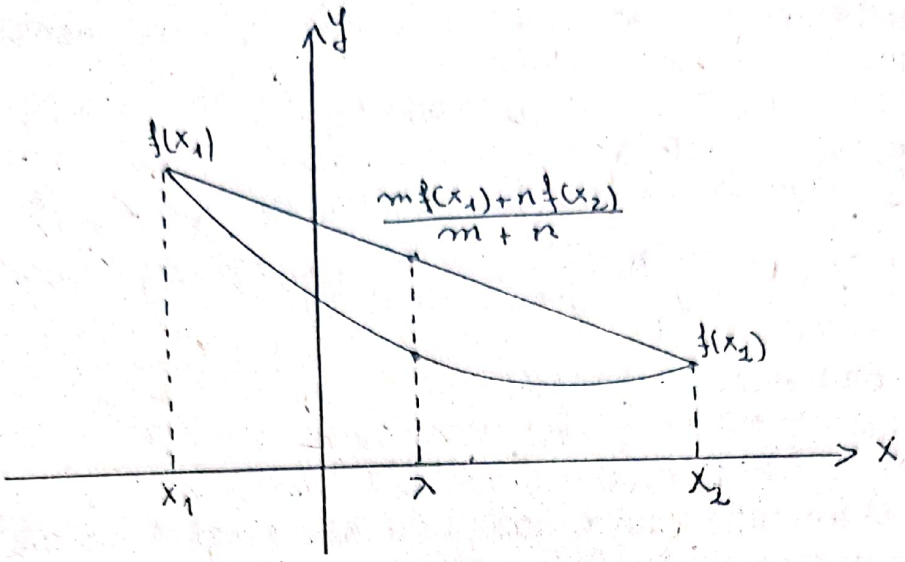


Fig. 68.

CAPITOLUL II. FUNCȚII REALE

II.1. DEFINIȚIA FUNCȚIEI. FUNCȚII EGALE ȘI FUNCȚII NEEGALE. OPERAȚII CU FUNCȚII REALE DE VARIABILĂ REALĂ

Fiind date două mulțimi E și F și un procedeu f prin care se asociază la orice element x din E un singur element y din F, spunem că am definit o funcție pe E cu valori în F.

Vom scrie $f:E\to F$, $y=f(x)$. y se numește imaginea lui x prin f, iar x contraimagine a lui y prin f. E (respectiv F) se numește domeniu de definiție (respectiv codomeniu) a lui f. Dacă $E\subseteq\mathbb{R}$ atunci f se numește funcție de variabilă reală, iar dacă $F\subseteq\mathbb{R}$, funcția se numește reală. Dacă $A\subseteq\mathbb{R}$ se numește imaginea directă a lui A prin f și se notează f(A), mulțimea $f(A)=\{y\in F/\exists x\in A$ astfel încît $y=f(x)\}$. În particular, f(E) se numește imaginea lui f și se notează cu Im(f). Dacă $B\subseteq F$, mulțimea $F^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}$ se numește imaginea inversă sau contraimaginea lui B prin f. Fie funcția $f:E\to F$, $A\subseteq E$ și $B\subseteq f(A)$. Funcția $g:A\to B$, $g(x)=f(x)$, $(\forall x\in A)$ se numește restricție iar f o prelungire a funcției g. Funcțiile $f_1:E_1\to F_1$ și $f_2:E_2\to F_2$ sînt egale dacă: $E_1=E_2$, $F_1=F_2$ și $f_1(x)=f_2(x)$, $\forall x\in E_1$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie două funcţii $f:E\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$; $g:F\to\mathbb{R}$, $y=g(x)$ astfel încît $E\cap F\neq\varnothing$. Definim următoarele funcţii:

- funcţia sumă: $f+g:E\cap F\to\mathbb{R}$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- funcţia diferenţă: $f-g:E\cap F\to\mathbb{R}$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- funcţia produs: $f\cdot g:E\cap F\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- funcţia cît: $\frac{f}{g}:E\cap(F-G)\to\mathbb{R}$, $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ unde $G=\{x\in\mathbb{R}/g(x)=0\}$;

$af:E\to\mathbb{R}$; $(af)(x)=af(x)$.

Exemple de funcţii particulare:

1) Funcţia constantă: $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}$, $f(x)=c$, $\forall x\in E$

2) Funcţia identică: $f:E\to F$, $e_E(x)=x$, $\forall x\in E$, $E,F\subseteq\mathbb{R}$.

3) Funcţia partea întreagă a lui x, notată cu [x] reprezintă cel mai mare întreg n cu proprietatea că $n\leq x$, $x\in\mathbb{R}$. $x=[x]+\{x\}$; $\{x\}$ reprezintă partea zecimală a lui x.

4) Funcţia signum $sign:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$sign\ x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

5) Funcţia lui Dirichlet: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & \forall x\in Q\\ 0, & \forall x\in\mathbb{R}-Q\end{cases}$

6) Funcţia lui Riemann: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & \forall x\in Q^*,\ x=\frac{p}{q},\ q\geq 1 si(p,q)=1\\ 0, & \forall x\in\mathbb{R}-Q^*\end{cases}$$

7) Funcţia lui Heaviside (treapta unitate): $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\sigma(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$

8) Modulul sau valoarea absolută a funcţiei f(x) se notează $|f(x)|$ şi se defineşte astfel: Dacă $f:A\to\mathbb{R}$ este o funcţie, $A\subseteq\mathbb{R}$ atunci $|f|:A\to\mathbb{R}_+$ şi

$$|f|(x)=|f(x)|=\begin{cases}f(x), & dacă\ f(x)>0\\ 0, & dacă\ f(x)=0\\ -f(x), & dacă\ f(x)<0\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular dacă $f(x)=x$, avem $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$

Proprietăţile modulului:

a) $|x| \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0$;

b) $|+x| = |-x| = x$, dacă $x \geq 0$; $|+x| = |-x| = -x$, dacă $x \leq 0$;

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

d) $||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$;

e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$

g) $|x| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq x \leq +\epsilon \Leftrightarrow x \in [-\epsilon, +\epsilon]$, $(\epsilon > 0)$.

h) $|x| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x < +\epsilon \Leftrightarrow x \in (-\epsilon, +\epsilon)$; $(\epsilon > 0)$.

i) $|x| \geq \epsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, +\infty)$; $(\epsilon > 0)$

j) $|x| > \epsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\epsilon) \cup (\epsilon, +\infty)$; $(\epsilon > 0)$.

k) $a \leq x \leq b \Leftrightarrow \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$

Distanţa dintre două numere reale $x, y \in \mathbb{R}$ se defineşte ca fiind $d(x,y) = |x-y|$.

II.2. ECUAŢII FUNCŢIONALE

O ecuaţie funcţională este o ecuaţie ale cărei soluţii sînt funcţii. Exemple de ecuaţii functionale:

1) Ecuaţia funcţiilor pare: $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, unde I satisface condiţia $(x \in I) \Rightarrow (-x \in I)$

2) Ecuaţia funcţiilor impare: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, (cu $x \in I \Rightarrow -x \in I$)

3) Ecuaţia lui Cauchy: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4) Ecuaţia lui Abel: $f(g(x)) = f(x) + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sînt date şi se caută $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5) Ecuaţia lui Poisson: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu necunoscuta f.

6) Ecuaţia funcţiilor omogene de grad k $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\forall x \in I$ şi $\forall t \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

II.3. FUNCȚII INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE.

Funcția $f:E\to F$ se numește injectivă dacă $\forall x_1,x_2\in E$, $(x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)) \Leftrightarrow (f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2) \Leftrightarrow \forall y\in F$ există cel mult un element $x\in E$ încît $y=f(x)$ $\Leftrightarrow$ dacă G_f este graficul lui f în raport cu un sistem de axe cartezian xoy, atunci orice paralelă la axa x'x dusă prin punctele mulțimii F intersectează graficul G_f în cel mult un punct.

Compunerea a două funcții injective este o funcție injectivă. Cu o funcție injectivă se poate simplifica la stînga.

Funcția $f:E\to F$ se numește surjectivă dacă ecuația $y=f(x)$ are cel puțin o soluție în E $\Leftrightarrow$ $f(E)=F$ $\Leftrightarrow$ dacă G_f este graficul lui f în raport cu un sistem de axe cartezian xoy, atunci orice paralelă la axa x'x dusă prin punctele mulțimii F inntersectează graficul G_f în cel puțin un punct.

Dacă gof este surjectivă $\Rightarrow$ g surjectivă.

Funcția $f:E\to F$ se numește bijectivă dacă este injectivă și surjectivă $\Leftrightarrow \forall y\in F$, $\exists$ un singur $x\in E$ astfel încît $y=f(x)$ $\Leftrightarrow$ dacă G_f este graficul lui f în raport cu un sistem de axe cartezian xoy, atunci orice paralelă la axa x'x dusă prin punctele mulțimii F intersectează graficul într-un singur punct.

II.4. COMPUNEREA ȘI INVERSAREA FUNCȚIILOR

Fie funcțiile $f:E\to F$ și $g:F\to G$. Numim funcție compusă funcția $gof:E\to G$, unde $(gof)(x)=g(f(x))$, $(\forall x\in E)$.

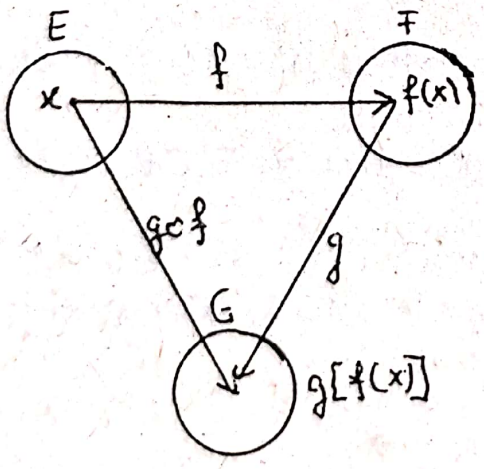


Fig. 69.

Dacă una dintre funcțiile (fog)oh, fo(goh) este definită, atunci este definită și cealaltă și este adevărată relația: fo(goh) = (fog)oh, adică compunerea funcțiilor este asociativă. În plus se constată că comutativitatea nu este adevărată în general.

Scanned with OKEN Scanner

Alte proprietăți ale funcțiilor compuse:

a) Dacă f și g sînt injective $\Rightarrow$ gof injectivă.
b) Dacă f și g sînt surjective $\Rightarrow$ gof surjectivă
c) Dacă f și g sînt bijective $\Rightarrow$ gof bijectivă
d) Dacă gof injectivă $\Rightarrow$ f injectivă
e) Dacă gof surjectivă $\Rightarrow$ g surjectivă
f) Dacă gof surjectivă și g injectivă $\Rightarrow$ f surjectivă
g) Dacă gof injectivă și f surjectivă $\Rightarrow$ g injectivă.

Dacă $f:E\to F$ este bijectivă, rezultă că $\forall y\in F$, $\exists! x\in E$ încît $y=f(x)$. Rezultă că se poate defini o funcție $f^{-1}:F\to E$, $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$; f^{-1} se numește inversa lui f. Pentru a găsi funcția inversă a unei funcții f (cînd există) se rezolvă ecuația $y=f(x)$ în raport cu necunoscuta x, apoi se schimbă x cu y. Într-un sistem cartezian de axe de coordonate xoy, graficul funcției inverse f^{-1} este simetric graficului funcției f față de prima bisectoare. Dacă $f:E\to F$ este o funcție inversabilă cu inversa f^{-1} atunci $fof^{-1}=1_F$; $f^{-1}of=1_E$; $f(f^{-1}(y))=y$, $\forall y\in F$; $f^{-1}(f(x))=x$, $\forall x\in E$.

II.5. FUNCȚII PARE ȘI FUNCȚII IMPARE

Fie $f:E\to F$ unde $E=(-a,a)$ sau $[-a,a]$, $(a\in\mathbb{R}_+^*)$. Funcția f se numește pară dacă pentru $(\forall x\in E)$ $f(-x)=f(x)$. În cazul funcțiilor pare $M(x,f(x))$ și punctul $M'(-x,+f(x))$ aparțin G_f, $\forall x\in E$, ceea ce înseamnă că acest grafic este simetric față de a doua axă y'Oy. Funcția f este impară dacă $(\forall x\in E)$, $f(-x)=-f(x)$. $M(x,f(x))$; $M'(-x,-f(x))\in G_f, \forall x\in E$, G_f este simetric față de originea axelor de coordonate.

II.6. PERIODICITATEA FUNCȚIILOR.

Funcția $f:I\to\mathbb{R}$ este periodică dacă există un $T>0$ astfel încît $f(x+T)=f(x)$. T se numește perioada principală. Dacă $f(x+T)=f(x)$ atunci și $f(x+kT)=f(x)$, $\forall k\in Z$ (grecește peri, „în jur, împrejur", hodos „drum").

Dacă f(x) este periodică și are perioada principală T_1, atunci f(ax), $a\in\mathbb{R}$, este funcție periodică de perioadă principală $T=\frac{T_1}{a}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă f_1 și f_2 sînt funcții periodice de perioade principale T_1 și T_2 și dacă $\frac{T_1}{T_2} \in Q$, atunci suma, diferența, produsul, sau orice funcție de forma $\varphi(f_1, f_2)$ este periodică și admite o periodă pe cel mai mic multiplu comun al perioadelor T_1 și T_2.

Exemple: a) Funcțiile $y = b \cdot \sin(ax)$ cu $ab \neq 0$ sînt periodice de periodă $\frac{2\pi}{a}$.

b) Funcțiile de forma $y = b_1 \cdot \sin(a_1 x) + b_2 \cdot \sin(a_2 x)$ sînt periodice dacă $\frac{T_1}{T_2} \in Q$. Perioada funcției va fi $T = m \cdot \frac{2\pi}{a_1} = n \cdot \frac{2\pi}{a_2}$ unde $\frac{a_2}{a_1} = \frac{n}{m}$, cu $(n,m) = 1$.

c) Funcțiile sinx și cosx au perioada principală 2π deoarece $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ și $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

d) Funcțiile $|\sin x|$, $|\cos x|$, tgx, ctgx au perioadele principale π întrucît $|\sin(x + \pi)| = |\sin x|$, $|\cos(x + \pi)| = |\cos x|$, $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$.

e) Funcția lui Dirichlet $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in Q \\ 0, \text{ dacă } x \in R - Q \end{cases}$ este periodică avînd ca perioadă orice număr rațional $T \neq 0$. f(x) nu are perioadă principală, $x + T$ și $x - T$ sînt la fel.

Observații: a) Graficul unei funcții periodice se trasează de obicei în intervalul [0,T] după care graficul se extinde pe intervalele [T,2T], [2T,3T], etc.

b) Perioada principală a funcțiilor compuse poate fi mai mică decît cel mai mic multiplu comun al perioadelor funcțiilor. Funcția $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ are perioada principală $T = \pi$; $\sin(x + \pi) \cdot \cos(x + \pi) = \sin x \cdot \cos x$.

c) Dacă f și g sînt periodice nu implică periodicitatea funcțiilor $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

d) Dacă f și g sînt periodice fog este periodică.

e) Dacă $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ sînt periodice nu implică periodicitatea funcțiilor f și g.

Scanned with OKEN Scanner

II.7. FUNCȚII MONOTONE.

Fie o funţie $f:D\to\mathbb{R}$, $y=f(x), D\subseteq\mathbb{R}$.

Funcţia se numeşte:

a) crescătoare pe D dacă $\forall x_1\in D, x_2\in D,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2) \Leftrightarrow$ $\forall x, x_0\in D,\ x\neq x_0$ avem $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$

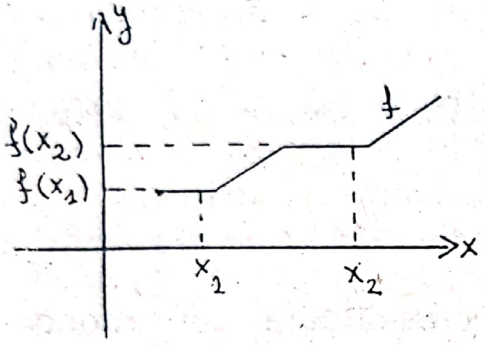


Fig. 70.

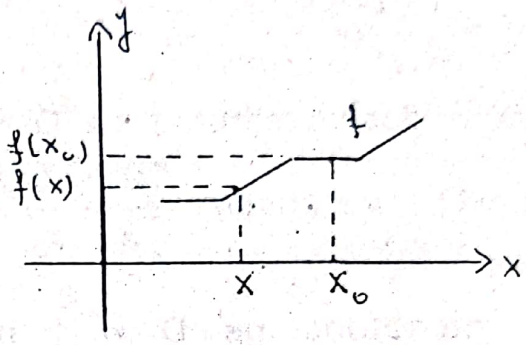


Fig. 71.

b) strict crescătoare pe D dacă $\forall x_1, x_2\in D,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow$ $\forall x, x_0\in D,\ x\neq x_0$ avem $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$

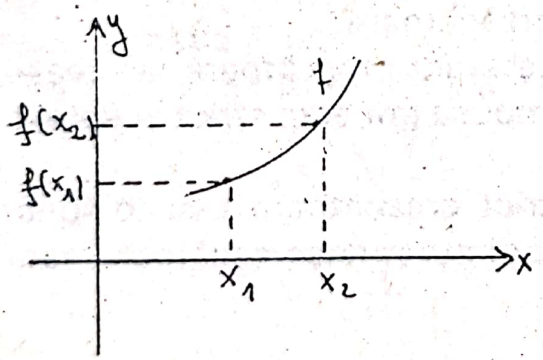


Fig. 72.

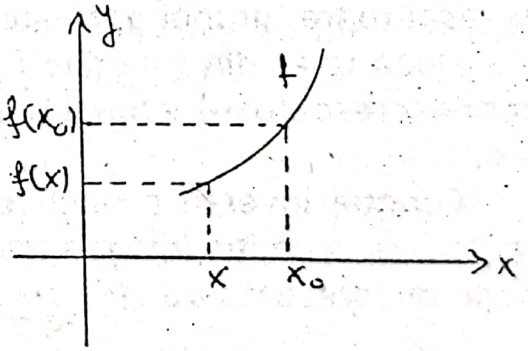


Fig. 73.

c) descrescătoare pe D $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2\in D,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2) \Leftrightarrow \forall x, x_0\in D,$ $x\neq x_0$ avem $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$

Scanned with OKEN Scanner

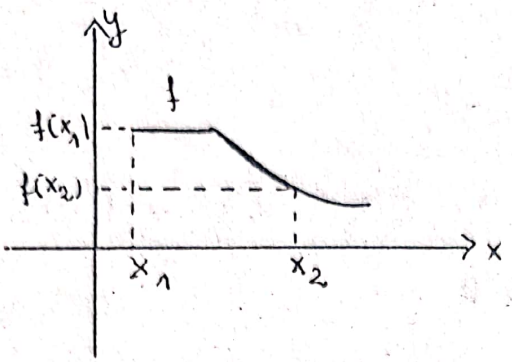


Fig. 74.

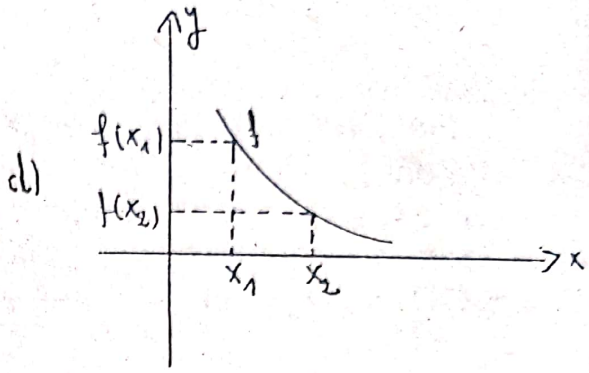


Fig. 75.

d) strict descrescătoare pe D $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$ $\forall x, x_0 \in D,\ x \neq x_0$ avem $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$

e) f monotonă pe D $\Leftrightarrow$ f monoton crescătoare sau monoton descrescătoare pe D.

f) f strict monotonă pe D $\Leftrightarrow$ f strict crescătoare sau strict descrescătoare pe D.

Orice funcţie $f: D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, strict crescătoare sau strict descrescătoare pe D, este injectivă.

Dacă f şi g sînt ambele strict crescătoare sau ambele strict descrescătoare, atunci gof este strict crescătoare.

Dacă una din funcţiile f şi g este strict crescătoare iar cealaltă strict descrescătoare, atunci funcţia compusă gof este strict descrescătoare.

Funcţia inversă a unei funcţii strict crescătoare este o funcţie crescătoare. Funcţia inversă a unei funcţii strict descrescătoare este o funcţie descrescătoare .

Dacă $f(x) > 0$, $\forall x \in E$ şi dacă f este strict crescătoare atunci $\dfrac{1}{f}$ este strict descrescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

II.8. FUNCȚII MĂRGINITE.

O funcție reală $f:E\to\mathbb{R}$ este mărginită dacă există un număr $M>0$, astfel încît pentru $(\forall x\in E)$ să avem $|f(x)|\leq M$ (sau $-M\leq f(x)\leq M$).

Numărul $m = \inf\limits_{x\in E} f(x)$ se numește marginea inferioară a funcției f iar numărul $M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$ se numește marginea superioară a funcției f. Marginea superioară a mulțimii E se caracterizează prin condițiile: $\forall x\in E$ avem $x\leq M$ și pentru $\forall \epsilon>0$, $\exists y\in E$ astfel încît $M-\epsilon<y$. Dacă pentru o mulțime $E\subset\mathbb{R}$ există min E (respectiv max E), atunci E este minorată (respectiv majorată) și inf E = min E (respectiv sup E = max E).

Spunem că o funcție reală de variabilă reală este majorată dacă graficul său se află în intregime sub o dreaptă $y=b$ paralelă cu axa ox.

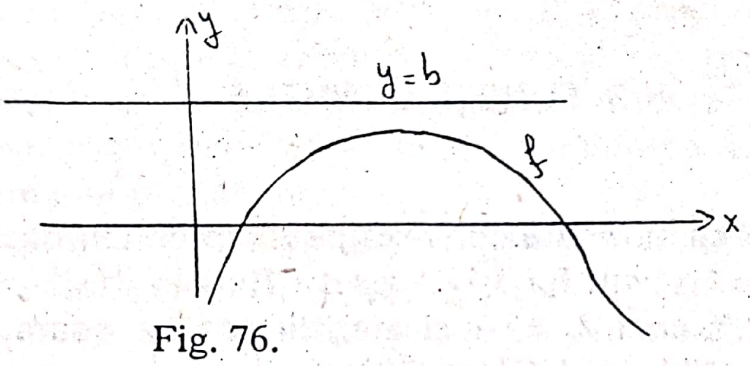


Fig. 76.

Funcția f este minorată dacă graficul său se află în întregime deasupra unei drepte $y=a$ paralelă cu axa ox.

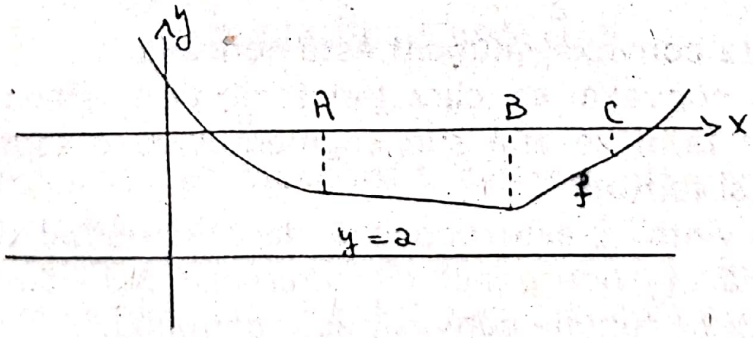


Fig. 77.

Dacă graficul funcției f se află în întegime cuprins între două drepte $y=a$ și $y=b$ paralele la axa ox spunem că funcția f este mărginită (adică mărginită inferior de a și mărginită superior de b).

Scanned with OKEN Scanner

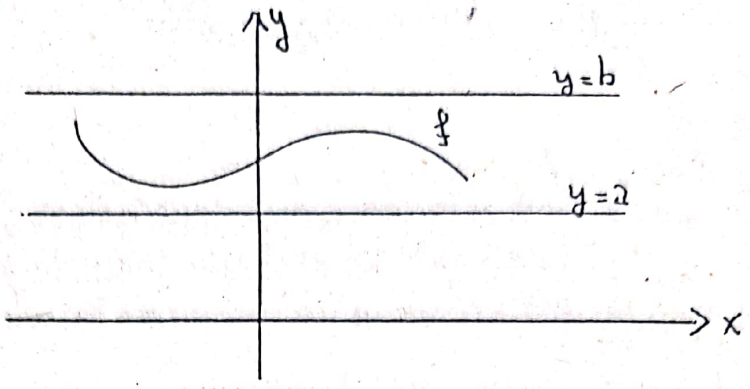


Fig. 78.

Proprietăţi:

a) f este mărginită ⇔ |f| mărginită

b) f mărginită ⇔ f^2 mărginită

c) f mărginită ⇒ $\frac{1}{f}$ mărginită

d) Dacă f şi g sînt mărginite ⇒ f+g, f·g, fog mărginite.

II.9. FUNCŢII CONVEXE

Funcţia $f:I\to\mathbb{R}$ se numeşte convexă pe I (I interval), dacă $\forall x_1,x_2\in I$ şi $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$ avem $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$.

Notînd $\lambda_2=t$ atunci $\lambda_1=1-t$ şi inegalitatea se poate scrie $f[(1-t)a+tb]\leq(1-t)f(a)+tf(b)$, $\forall a,b\in I$, $\forall t\in[0,1]$.

O funcţie $f:I\to\mathbb{R}$ (I interval) este convexă în sensul lui Jensen sau convexă (J) pe I dacă $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$, $\forall x,y\in I$.

Dacă -f este convexă, atunci f este concavă.

O funcţie convexă se caracterizează prin aceea că graficul restricţiei lui f la [a,b] se află sub segmentul de dreaptă ce uneşte punctele (a,f(a)) şi (b,f(b)).

Cu alte cuvinte, f este convexă dacă şi numai dacă dreapta tangentă la curbă în orice punct din intervalul (a,b) se găseşte sub graficul curbei. Orice funcţie convexă este continuă.

Fie $f:I\to J$, $g:J\to\mathbb{R}$, $I,J\subset\mathbb{R}$. Atunci:

- g convexă descrescătoare şi f concavă ⇒ gof convexă;
- g concavă crescătoare şi f concavă ⇒ gof concavă;
- g concavă descrescătoare şi f convexă ⇒ gof concavă.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III. ŞIRURI DE NUMERE REALE. LIMITE DE ŞIRURI.

III.1. NOŢIUNEA DE ŞIR.

Se numeşte şir de numere reale o funcţie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sau mai general, o funcţie definită pe o submulţime a lui $\mathbb{N}$ de forma $\mathbb{N}-A_k$, $k\geq 0$, unde $A_k=\{x\in\mathbb{N}/0\leq x<k\}$. Dacă f este un şir de numere reale notăm $f(n)=a_n$ şi a_n se numeşte termenul de rang n al şirului: $f(a_n)_{n\geq k,k\geq 0}$ sau simplu $(a_n)_{n\geq k}$. Două şiruri sînt egale în sensul egalităţii a două funcţii. Un şir f este complet determinat dacă se cunoaşte regula de evaluare a termenului său general $f(n)=a_n$.

Pentru $\forall a\in\mathbb{R}$, fixat avem funcţia de valoare constantă a, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $x\to a$ şi deci un şir pentru care toţi termenii sînt egali cu a. O tehnică des întîlnită de a defini şirul este aşa numita tehnică prin recurenţă care exprimă orice termen al şirului, de la un rang oarecare, prin precedenţii (unul sau mai mulţi) ca în exemplul următor: $a_{n+1}=a_n+2$, $a_1=3, n\geq 1$. Cînd vom zice "să se determine termenul general al unui şir definit recursiv" vom subînţelege că vrem să evaluăm pe a_n funcţie numai de n, nu de termenul precedent.

Două şiruri distincte pot avea aceeaşi mulţime a termenilor ca de exemplu şirurile $a_n=(-1)^n$ şi $b_n=(-1)^{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ care au mulţimea termenilor $\{-1,1\}$ deşi spunem totuşi că au o infinitate de termeni. Acelaşi lucru îl putem spune şi despre şirul constant.

III.2. ŞIRURI MONOTONE.

Un şir (a_n) este crescător dacă $k_1<k_2\Rightarrow a_{k1}\leq a_{k2}\Leftrightarrow\forall k$ din domeniul de definiţie al şirului, $a_k\leq a_{k+1}$.

Şirul (a_n) este strict crescător dacă $a_k<a_{k+1}$; descrescător dacă $a_k\geq a_{k+1}$ şi strict descrescător dacă $a_k>a_{k+1}$, oricare ar fi k din domeniul de definiţie al şirului.

Un şir crescător sau descrescător se numeşte şir monoton, iar un şir strict crescător sau strict descrescător se numeşte şir strict monoton. Monotonia unui şir se poate studia comparînd diferenţa a doi termeni succesivi cu 0 sau raportul lor cu 1.

Scanned with OKEN Scanner

III.3. ŞIRURI MĂRGINITE.

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o submulţime nevidă. Un element $b \in R$ se numeşte majorant pentru A dacă el este mai mare decît toate elementele lui A, adică $x \leq b$, $\forall x \in A$. În acest acest caz mulţimea A se numeşte mărginită superior sau majorată. Un element $a \in \mathbb{R}$ se numeşte minorant pentru A dacă el este mai mic decît toate elementele din A, adică $a \leq x$, $\forall x \in A$. Mulţimea A cu această proprietate se numeşte mărginită inferior sau minorată. Dacă un majorant $b \in A$, acest număr este unic şi este notat cu maxA.

În mod similar dacă un minorant $a \in A$ el se notează cu minA. O mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte mărginită dacă ea este mărginită superior şi inferior. Un şir infinit $(a_n)_{n \geq k}$, $(n,k \in \mathbb{N})$ de numere reale se numeşte mărginit dacă mulţimea termenilor săi este mărginită (M mărginită $\Leftrightarrow M \subseteq [\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$; $(a_n)_{n \geq k}$ mărginit $\Leftrightarrow \alpha \leq a_n \leq \beta$, $\forall n \geq k$, $n,k \in \mathbb{N}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$).

Cel mai mic majorant al mulţimii A se notează cu $\mu = \sup A$, numit şi marginea superioară a mulţimii A ce se caracterizează prin următoarele condiţii:

a) $\forall x \in A$, $x \leq \mu$

b) $\forall \epsilon > 0$, $\exists y \in A$ a.î. $\mu - \epsilon < y$

Prin simetrie faţă de origine, rezultă că orice submulţime minorată $A \subset \mathbb{R}$ admite un cel mai mare minorant, numit marginea inferioară a lui A şi notat infA.

Marginea superioară sau inferioară, poate sau nu să aparţină mulţimii A.

Un şir este nemărginit dacă în afara oricărui interval mărginit există cel puţin un termen din şir. Exemplu şirul 1, 2, 3, ..., n,... este mărginit inferior de 0 şi nemărginit superior.

Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sînt mărginite iar $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci şirurile $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $(\alpha \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sînt deasemenea mărginite.

III.4. ŞIRURI CONVERGENTE. OPERAŢII CU ŞIRURI CONVERGENTE. LIMITE DE ŞIRURI.

Numim vecinătate a punctului a orice mulţime $V \subset \mathbb{R}$ care conţine un interval deschis centrat în a. În acest caz există $r > 0$ astfel încît

Scanned with OKEN Scanner

$(a-r,a+r)\subset V$. Se numeşte vecinătatea lui $+\infty$ (respectiv $-\infty$) orice submulţime $V\subset\overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(b,\infty]$ (respectiv $[-\infty,b)$) unde b este un număr real iar $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Un punct $a\in\overline{\mathbb{R}}$ se numeşte punct de acumulare pentru $D\subset\mathbb{R}$, dacă în orice vecinătate a lui a există cel puţin un punct din $D-\{a\}$.

Un şir de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte convergent dacă există un număr real a astfel încît pentru $(\forall\epsilon>0)(\exists N(\epsilon))(n>N(\epsilon)\Rightarrow|a_n-a|<\epsilon)$. Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall\epsilon>0)(\exists N(\epsilon))(n>N(\epsilon)\Rightarrow a_n>\epsilon)$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nu există sau este $\pm\infty$, şirul este divergent.

Un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte şir fundamental sau şir Cauchy, dacă $(\forall\epsilon>0)(\exists N(\epsilon))(\forall n\in N(\epsilon))(\exists p\in\mathbb{N})(|a_{n+p}-a_n|<\epsilon)$.

Orice şir de numere reale monoton şi mărginit este convergent.

Orice şir convergent de numere reale este mărginit. Şirurile monotone şi nemărginite sînt divergente. Orice subşir al unui şir convergent este convergent. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt două şiruri de numere reale care verifică următoarele două condiţii:

a) $a_1\le a_2\le a_3\le\ldots\le a_n\le\ldots\le b_n\le\ldots\le b_2\le b_1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, atunci şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt convergente şi au aceeaşi limită.

Orice şir mărginit conţine un subşir convergent (Lema lui Cesaro).

CRITERII DE CONVERGENŢĂ

1) Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy: Un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.

2) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt două şiruri de numere reale cu proprietăţile $|a_n-a|\le|b_n|$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

3) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt şiruri de numere reale cu proprietăţile că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\in\overline{R}$, şi dacă există m astfel încît $a_n\le c_n\le b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge m$, atunci şirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

4) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt două şiruri de numere reale cu proprietăţile $a_n\ge b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, atunci şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

5) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt şiruri de numere reale cu proprietăţile $a_n\le b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ atunci şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

6) Dacă $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$ sînt șiruri de numere reale astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și $(b_n)_{n\in N}$ este mărginit, atunci șirul $(a_n \cdot b_n)_{n\in N}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$

Dacă $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$ sînt două șiruri convergente, atunci:

a) șirul sumă $(a_n + b_n)_{n\in N}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) șirul diferență $(a_n - b_n)_{n\in N}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

c) șirul produs $(a_n \cdot b_n)_{n\in N}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

d) șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ este convergent dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, $(b_n \neq 0)$ și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

e) șirul $(a_n^{b_n})_{n\in N}$ este convergent dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ și

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Consecințe: Dacă $(a_n)_{n\in N}$ este un șir convergent și $k\in\mathbb{R}$ atunci:

a) șirul $(a_n^k)_{n\in N}$ este convergent, $k\neq 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k$.

b) șirul $(k \cdot a_n)_{n\in N}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) șirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)^k_{n\in N}$ este convergent dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^k = \frac{1}{(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k}$.

d) Dacă $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$ sînt două șiruri convergente către zero, atunci, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = 0$.

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un șir de numere reale și $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Spunem că șirul $(a_n)_{n\in N}$ are limita a dacă în orice vecinătate a punctului a se află toți termenii șirului începînd de la un anumit rang.

Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; $a\in\overline{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă un șir de numere are limită finită sau nu atunci aceasta este unică.

Teorema de caracterizare a limitelor de șiruri

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

a) Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $a\in\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\forall\epsilon>0$, $\exists N(\epsilon)$, astfel încît $|a_n-a|<\epsilon$, $\forall n\geq N(\epsilon)$. Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

b) Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ dacă și numai dacă: $\forall\epsilon>0$, $\exists N(\epsilon)$, astfel încît $a_n>\epsilon$, $\forall n\geq N(\epsilon)$. Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

c) Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $-\infty$ dacă și numai dacă: $\forall\epsilon>0$, $\exists N(\epsilon)$ astfel încît $a_n<-\epsilon$, $\forall n>N(\epsilon)$. Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Lema (Cesaro Stolz): Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt șiruri de numere reale astfel încît:

a) șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton și nemărginit,

b) există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Criteriul Cauchy-D'Alembert: Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir cu $a_n\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a\in\mathbb{R}_+$ atunci există și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Criteriul majorării: Fie șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $a\in\mathbb{R}$. Dacă $|a_n-a|\leq\alpha_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Criteriul cleștelui: Fie trei șiruri de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care satisfac condițiile:

a) $a_n\leq c_n\leq b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, atunci există și $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Dacă $a_n\geq b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dacă $a_n\leq b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are proprietatea că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$.

Dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale pozitive are proprietatea că există

Scanned with OKEN Scanner

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}_+$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a$.

Dacă două șiruri de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfac condițiile:

a) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$.

Formule de calcul al limitelor de șiruri — tip

a) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu există dacă } q \leq -1 \\ 0 \text{ dacă } -1 < q < 1 \\ 1 \text{ dacă } q = 1 \\ +\infty \text{ dacă } q > 1 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k) = \lim\limits_{n\to\infty} a_0 n^k = \begin{cases} +\infty \text{ dacă } a_0 > 0 \\ -\infty \text{ dacă } a_0 < 0 \end{cases}$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_0}{b_0} \cdot n^{k-m}\right) = \begin{cases} -\infty \text{ dacă } grP > grQ, \dfrac{a_0}{b_0} < 0 \\ \dfrac{a_0}{b_0} \text{ dacă } grP = grQ, \\ +\infty \text{ dacă } grP > grQ, \dfrac{a_0}{b_0} > 0 \\ 0 \text{ dacă } grP < grQ \end{cases}$$

în condițiile de existență a acestor polinoame.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + f(n))^{\frac{1}{f(n)}} = e$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$

Scanned with OKEN Scanner

f) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, $k\in\mathbb{R}^*$ și dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{a_n}\right)^{b_n} = e^{k\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}}.$$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{k}{f(n)}}{\frac{k}{f(n)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{tg\frac{k}{f(n)}}{\frac{k}{f(n)}} = 1$, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin a_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{tg\, a_n}{a_n} = 1$, $\forall f(n)\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $k\neq 0$, $k\in\mathbb{R}$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k}$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

Avem următoarele cazuri de nedeterminare: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; ∞^0; 0^0; 1^∞.

III.5. SERII NUMERICE

Fiind dat un șir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește serie asociată acestui șir, șirul $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Numim serie expresia $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Numărul S se numește suma seriei; a_1, a_2, ..., a_n, ... se numesc termenii seriei iar șirul $(S_n)_{n\geq 1}$, șirul sumelor parțiale.

Observație: Dacă șirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent și are limita S atunci se scrie

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă șirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Scanned with OKEN Scanner

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este oscilantă dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este oscilant.

Criteriul general al lui Cauchy: Condiţia necesară şi suficientă ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie convergentă este ca pentru $\forall \epsilon > 0$ să $\exists N(\epsilon)$ astfel încît pentru $\forall n > N(\epsilon)$ şi $\forall p \in \mathbb{N}$ să avem: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon$.

Dacă şirul format cu termenii unei serii nu este convergent către zero, seria este divergentă.

Criteriul monotoniei: Dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ al sumelor parţiale ale unei serii cu termenii pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este mărginit, atunci seria este convergentă, iar dacă este nemărginit seria este divergentă.

Primul criteriu de comparaţie: Fie $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există un număr N astfel încît $U_n \leq V_n$, $\forall n \geq N$ atunci:

a) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ este convergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ este convergentă.

b) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ este divergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ este divergentă.

Al doilea criteriu de comparaţie: Fie $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există un număr N astfel ca $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$ pentru $\forall n \geq N$ atunci:

a) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ este convergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ este convergentă;

b) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ este divergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ este divergentă.

Algoritm practic: Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = I$ atunci:

Scanned with OKEN Scanner

a) dacă $l \neq 0$ și finit, seriile $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ au aceeași natură;

b) dacă $l = 0$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ este convergentă rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ este convergentă;

c) dacă $l = +\infty$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ este divergentă și seria $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ este divergentă.

Criteriul rădăcinii (Cauchy): Fie seria cu termenii pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dacă există un număr N astfel încît pentru $\forall n \geq N$ să avem:

a) $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow$ seria este convergentă;

b) $\sqrt[n]{a_n} \geq q > 1 \Rightarrow$ seria este divergentă.

Algoritm practic: Dacă există $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ atunci:

a) dacă $\lambda < 1 \Rightarrow$ seria este convergentă;
b) dacă $\lambda > 1 \Rightarrow$ seria este divergentă;
c) dacă $\lambda = 1$, criteriul nu se poate aplica.

Criteriul raportului (D'Alembert): Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr N astfel încît pentru $\forall n \geq N$, să avem:

a) dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, seria este convergentă;

b) dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$, seria este divergentă.

Algoritm practic: Dacă există $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, atunci dacă:

a) $\lambda < 1 \Rightarrow$ seria este convergentă;
b) $\lambda > 1 \Rightarrow$ seria este divergentă;
c) $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul lui Raabe-Duhamel: Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă $\exists N$ astfel încît pentru $\forall n > N$,

Scanned with OKEN Scanner

a) $n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq\lambda>1$ seria este convergentă;

b) $n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq\lambda<1$ seria este divergentă.

Algoritm practic: Fie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există $\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda$ atunci dacă:

a) $\lambda>1$ seria este convergentă;
b) $\lambda<1$ seria este divergentă;
c) $\lambda=1$ criteriul nu se aplică.

Criteriul logaritmic: Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, dacă, începînd de la un anumit rang N, avem inegalitatea $\frac{lg\frac{1}{a_n}}{lgn}>1$, $\forall n>N$ seria este convergentă, iar dacă $\frac{lg\frac{1}{a_n}}{lgn}<1$, $\forall n>N$, seria este divergentă.

Algoritm practic: Dacă există $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln a_n}=\lambda$ atunci dacă:

a) $\lambda>1$, seria este convergentă;
b) $\lambda<1$, seria este divergentă;
c) $\lambda=1$, criteriul nu se aplică.

O serie $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ cu termeni oarecare se numeşte absolut convergentă dacă seria modulelor $|U_1|+|U_2|+\ldots+|U_n|+\ldots$ este convergentă. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ este convergentă iar seria modulelor este divergentă, seria se numeşte semiconvergentă.

Dacă o serie cu termeni oarecare este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Criteriul lui Abel: Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ cu termeni oarecare astfel încît şirul sumelor parţiale S_n este mărginit $|S_n| \leq M$. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este un şir de numere pozitive monoton descrescător avînd ca limită zero, atunci seria $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n + \ldots$ este convergentă.

Se numeşte serie alternantă o serie de forma $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^{n+1}U_n + \ldots$, unde toţi U_n sînt numere pozitive.

Criteriul lui Leibniz: Dacă într-o serie alternantă şirul U_n este monoton descrescător şi are limita zero, seria este convergentă.

CAPITOLUL IV. LIMITE DE FUNCŢII. CONTINUITATE.

IV.1. NOŢIUNEA DE LIMITĂ. LIMITE LATERALE. OPERAŢII CU LIMITE DE FUNCŢII. CRITERII.

Fie $f:E \to \mathbb{R}$, şi x_0 un punct de acimulare al mulţimii E finit sau infinit. "Spunem că un număr l finit sau infinit este limita funcţiei f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \neq x_0$ din $V \cap E$, să avem $f(x) \in U$. Se notează $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$" $\Leftrightarrow$

"Funcţia f are limita l în punctul x_0 dacă pentru orice $\epsilon > 0$, există un număr $\delta(\epsilon) > 0$ astfel încît să avem $|f(x)-l| < \epsilon$ pentru orice $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$, $x \in E$." $\Leftrightarrow$

"Funcţia f are limita l în punctul x_0 dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$ ($x_n \in E$, $x_n \neq x_0$) avem $f(x_n) \to l$."

"Se spune că funcţia $f:D \to \mathbb{R}$ are în punctul x_0 (punct de acumulare al lui D) limita la stînga l_s dacă pentru $\forall$ vecinătate U a lui l_s, $\exists$ o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x < x_0$, $x \in V \cap D$ să avem $f(x) \in U$. Se scrie $l_s = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0)$." $\leftrightarrow$." $\Leftrightarrow$

"Oricare ar fi $\epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$, astfel încît să avem $|f(x)-l_s| < \epsilon$, pentru $0 < x_0 - x < \delta(\epsilon)$, $x \in D$, $x \neq x_0$ (x_0, l_s finite)." $\Leftrightarrow$

"Orice şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \to x_0$ ($x_n < x_0$, $x_n \in D$) şirul corespunzător al valorilor funcţiei f, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ are limita l_s. Se scrie $\lim_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n < x_0}} f(x_n) = l_s$."

Scanned with OKEN Scanner

"Se spune că funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are în punctul x_0 (punct de acumulare a lui D) limita la dreapta l_d dacă pentru orice vecinătate U a lui l_d există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi $x\in V\cap D$, $x>x_0$ să avem $f(x)\in U$. Se scrie $l_d = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0+0)$."⇔

"$\forall\epsilon>0$, $\exists\delta(\epsilon)>0$, astfel încît să avem $|f(x)-l_d|<\epsilon$ dacă $0<x-x_0<\delta(\epsilon)$, $x\in D$, $x\neq x_0$. (x_0, l_d, finite)" ⇔

"Orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n\to x_0$, ($x_n>x_0$, $x_n\in D$) şirul valorilor $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are limita l_d. Se scrie $\lim\limits_{\substack{x_n\to x_0\\ x_n>x_0}} f(x_n) = l_d$."

O funcţie monotonă $f:D\to\mathbb{R}$ are limite laterale în orice punct de acumulare al mulţimii D.

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$ un punct de acumulare pentru D cu proprietatea că funcţia f are limite laterale în punctul $x=x_0$. Atunci afirmaţiile următoare sînt echivalente:

a) funcţia f are limită în punctul $x=x_0$

b) $l_s=l_d$

În aceste condiţii este adevărată următoarea egalitate:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Fie funcţiile $f,g:D\to\mathbb{R}$ şi x_0 un punct de acumulare finit sau infinit al lui D. Presupunem că funcţiile f şi g au limite finite sau nu în x_0. Dacă operaţiile următoare au sens şi posedă limită în x_0 atunci:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (excepţie $\infty-\infty$)

b) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (excepţie $0\cdot\infty$)

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (excepţie $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$)

d) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (excepţie 0^0, 1^∞, ∞^0)

Fie funcţiile $f:A\to B$ şi $g:B\to\mathbb{R}$, a un punct de acumulare a lui A şi B un punct de acumulare a lui B. Dacă: a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, b) $f(x)\neq b$ pentru $x\neq a$, c) g are limită în punctul b, atunci funcţia compusă gof are limită în punctul a şi $\lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = \lim\limits_{y\to b} g(y)$.

Scanned with OKEN Scanner

Criteriul 1: Dacă $|f(x) - l| \leq g(x)$, $\forall x \in D$ și dacă $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Criteriul 2: Dacă $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in D$ și dacă $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, atunci și $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Criteriul 3: Dacă $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$ și dacă $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, atunci și $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Criteriul 4: Dacă $|f(x)| < M$ și $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

Criteriul 5 (Cauchy-Bolzano): Condiția necesară și suficientă ca funcția f definită pe mulțimea D să aibă limită finită în punctul x_0 (x_0 finit) de acumulare al lui D este ca pentru $\forall \epsilon > 0$ să $\exists$ o vecinătate V a lui x_0, astfel ca îndată ce $x', x'' \in V \cap D$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, să avem $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

IV.2. ASIMPTOTELE FUNCȚIILOR REALE

Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ și $G_f = \{(x,y) \in D^2 \mid y = f(x)\}$ graficul funcției f. O dreaptă d se numește asimptotă la graficul funcției f dacă o ramură nemărginită a graficului se apropie din ce în ce mai mult de dreapta d (dreapta d devenind tangentă graficului la $+\infty$ sau $-\infty$).

Fie x_0 un punct de acumulare a mulțimii D. Numim asimptotă verticală la stînga a graficului funcției f(x) dreapta $x = x_0$ pentru care $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ (*sau* $-\infty$). Analog avem asimptotă verticală la dreapta pentru $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$ (*sau* $-\infty$).

Dreapta $y = y_0$ se numește asimptotă orizontală spre $+\infty$ a graficului funcției f(x) dacă $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Analog avem asimptota orizontală spre $-\infty$ dacă $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dreapta $y = mx + n$ este asiptota oblică la ramura $+\infty$ a graficului funcţiei f dacă $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - mx - n] = 0$, unde:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ n = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx]$$

Dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la ramura $-\infty$ a graficului funcţiei f dacă $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - mx - n] = 0$, unde:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ n = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx]$$

IV.3. LIMITE DE FUNCŢII.

Pentru orice polinom $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1$, cu $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $x \in \mathbb{R}$ şi x_0 finit avem:

$$\lim_{x\to x_0}P(x) = \lim_{x\to x_0}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_n) = a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_n = P(x_0)$$

Pentru orice polinom $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1$ definit pe $\mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ avem:

a)

$$\lim_{x\to\infty}P(x) = \lim_{x\to\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim_{x\to\infty}x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = \lim_{x\to\infty}a_nx^n$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}P(x) = \lim_{x\to-\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim_{x\to-\infty}x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = \lim_{x\to-\infty}a_nx^n$$

Fie funcţiile polinomiale $P, Q: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1$ şi $Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1$ cu $a_n \cdot b_n \neq 0$, $x, a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$. Atunci orice funcţie raţională $\frac{P}{Q}$ are limită într-un punct x_0

Scanned with OKEN Scanner

finit, pentru care $Q(x_0)\neq 0$ și $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Pentru orice funcție rațională

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1},\ a_n\neq 0,\ b_m\neq 0$$

avem:

a) Dacă $n<m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$.

b) Dacă $n=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_n}{b_n}$.

c) Dacă $n>m$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}\cdot x^{n-m},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_n}{b_n}\cdot x^{n-m}$$

Fie funcția rațională $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ definită pe $\mathbb{R}$ și x_0 0 rădăcină a numitorului, $Q(x_0)=0$. Dacă p și q sînt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii x_0 respectiv pentru P și Q, avem: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{(x-x_0)^p\cdot P_1(x)}{(x-x_0)^q\cdot Q_1(x)}$ unde $p.q\in\mathbb{N}$, iar $P_1(x_0)\neq 0$, $Q_1(x_0)\neq 0$.

a) Dacă $p>q$, avem $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$.

b) Dacă $p=q$, avem $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\dfrac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$.

c) Dacă $p<q$ și $q-p=2k$, $k\in\mathbb{N}$, avem $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=+\infty\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$

d) Dacă $p<q$ și $q-p=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$, avem $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=-\infty\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$,

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=+\infty\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, deci funcția $\dfrac{P}{Q}$ nu are limită în x_0.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$ se numește funcție radical. Dacă $n=2k+1$, $k\geq 1$, $k\in\mathbb{N}^*$, $D=\mathbb{R}$ iar dacă $n=2k$, $k\geq 1$, $k\in\mathbb{N}D=\mathbb{R}_+$.

Proprietăți ale radicalilor: $(m,n\geq 2;\ m,n\in\mathbb{N})$

a) $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$, $a,b\geq 0$

b) $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$, $a\geq 0$, $b>0$

c) $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, $a\geq 0$

d) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}$, $a\geq 0$

e) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $a\geq 0$

f) $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

Inversa funcției radical este funcția putere $g(x)=x^n$.

Dacă $2k+1$ este impar natural $k\geq 1$ și $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1$, atunci pentru orice x real avem:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[2k+1]{P(x)}=\sqrt[2k+1]{P(x_0)}$ (în particular $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[2k+1]{x}=\sqrt[2k+1]{x_0}$)

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[2k]{P(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[2k]{a_n\cdot x^n}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[2k+1]{P(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[2k+1]{a_n\cdot x^n}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[2k+1]{P(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[2k+1]{a_n\cdot x^n}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[2k]{P(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[2k]{a_n\cdot x^n}$ dacă $a_n(-\infty)^n\geq 0$

În calculele cu radicali se utilizează frecvent formulele de conjugare de tipul:

a) $\sqrt[n]{a^m}\ \sqrt[n]{a^{n-m}}=a$;

b) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$;

c) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$;

d) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a\cdot b}+\sqrt[3]{b^2})=a+b$;

Scanned with OKEN Scanner

e) $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}b^0}+\sqrt[n]{a^{n-2}b^1}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\ldots+\sqrt[n]{a^0b^{n-1}})=a-b$
(condiţiile de existenţă sînt cele cunoscute)

Numim funcţie logaritmică de bază a, funcţia
$\log_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$.

Proprietăţile logaritmilor:

a) $\log_a x=y \leftrightarrow (x=a^y,\ a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$

b) $\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2;\ x_1,x_2>0$

c) $\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2;\ x_1,x_2>0$

d) $\log_a x^n=n\cdot\log_a x,\ x>0,\ n\in\mathbb{N}$

e) $\log_a\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x;\ x>0,\ n\geq 2,\ a>0,a\neq 1$

f) $\log_a x=\log_b x\cdot\log_a b;\ x>0,\ b>0,\ a>0,\ b\neq 1,\ a\neq 1$

g) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a};\ a,b>0;\ a,b\neq 1$

Observaţie: Inversa funcţiei logaritmice este funcţia exponenţială $g(x)=a^x$. Dacă $a=10$ avem logaritmul zecimal $\lg x=\log_{10}x$ iar dacă $a=e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ avem logaritmul natural notat $\ln x=\log_e x$.

h) $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{\lg x}{\lg a}$

Dacă $a>0$, $a\neq 1$ şi $x_0>0$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0$.

Dacă $a>1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_a x=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=+\infty$

Dacă $0<a<1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_a x=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$

Limite standard:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\log_a e,\ a>0,\ a\neq 1;$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1;$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(x+1)}{x}=\lg e$.

Relații utile în calcule:

a) $f^g=e^{g\ln f}$, $f>0$, $g\in\mathbb{R}$

b) $f^g=10^{g\lg f}$, $f>0$, $g\in\mathbb{R}$

c) $a_k=e^{\ln a_k}=\ln e^{a_k}$

d) $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln e^{a_k}=\ln\prod\limits_{k=1}^{n}e^{a_k}$

e) $\prod\limits_{n=1}^{n}a_k=\prod\limits_{k=1}^{n}e^{\ln a_k}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k}$

Numim funcție exponențială orice funcție de forma: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, $a\in\mathbb{R}$.

Numim funcție putere orice funcție de forma: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^r$, $\forall r\in\mathbb{R}$.

Proprietăți ale puterilor cu exponent real:

Fie $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$, $a,b\in\mathbb{R}$, $x,x_1,x_2\in\mathbb{R}$ atunci:

a) $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$

b) $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}$

c) $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1\cdot x_2}$

d) $\sqrt[x_1]{a^{x_2}}=a^{\frac{x_1}{x_2}}$, $x_1\in\mathbb{N}$, $x_1\geq 2$

e) $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$

f) $a^0=1$

g) $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$

h) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

Dacă $a>0$, $a\neq 1$ și $x_0\in\mathbb{R}$ atunci:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, dacă $a>1$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ dacă $0<a<1$.

Oricare ar fi $x_0>0$, $x_0\in R$ și $r\in R$ avem:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} x^r = x_0{}^r$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } r > 0 \\ 1, \text{ dacă } r = 0 \\ 0, \text{ dacă } r < 0 \end{cases}$

Limite—standard:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a > 1$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a > 1$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = 0$, $0 < a < 1$, $n\in\mathbb{N}^*$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x\cdot x^n = 0$, $0 < a < 1$, $n\in\mathbb{N}$;

e) $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$;

f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;

g) $\lim\limits_{x\to b} \frac{a^x - b^x}{x - b} = a^b \ln a$, $a > 0$;

h) $\lim\limits_{x\to0} a^x = 1$;

i) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[1 + \frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)} = e$, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$;

j) $\lim\limits_{x\to x_0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$;

k) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[1 + \frac{k}{f(x)}\right]^{f(x)} = e^k$, $k\in\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$;

l) $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$, $\forall r\in\mathbb{R}$;

Scanned with OKEN Scanner

m) $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ v\to\infty}} (1+u)^v = e^{\lim\limits_{u\to 0} u\cdot v}$;

n) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)-1]\cdot g(x)}$

cu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, $f(x) > 0$

Funcţiile trigonometrice:

a) $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$

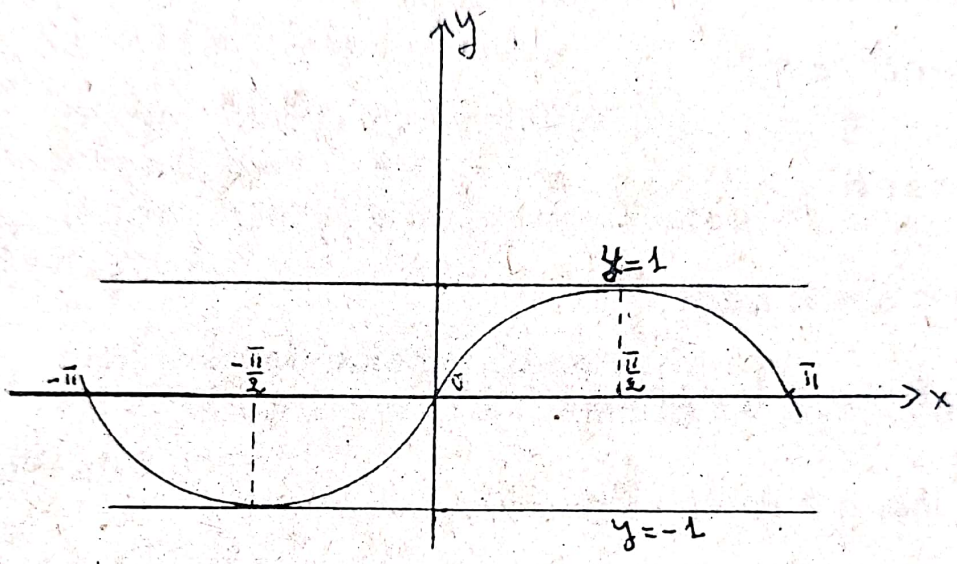


Fig. 79. Graficul funcţiei f(x) = sinx

b) $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$

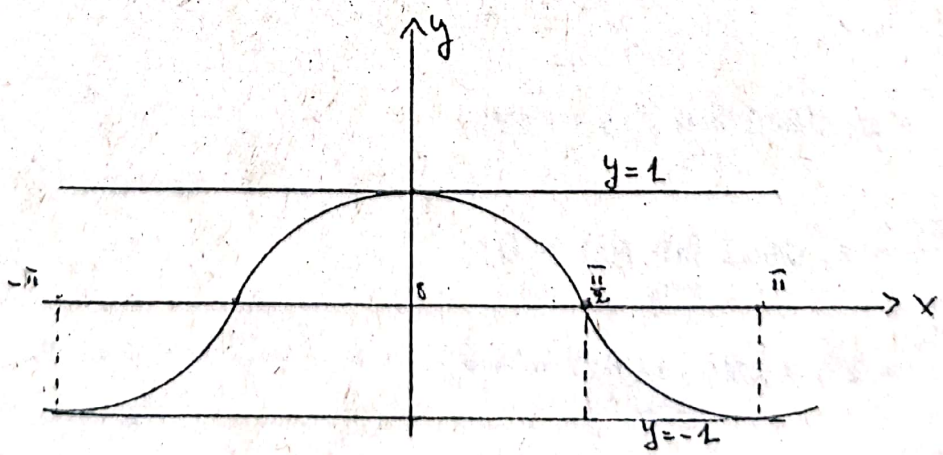


Fig. 80. Graficul funcţiei f(x) = cosx

Scanned with OKEN Scanner

c) $tg : \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + Z\pi\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = tgx$

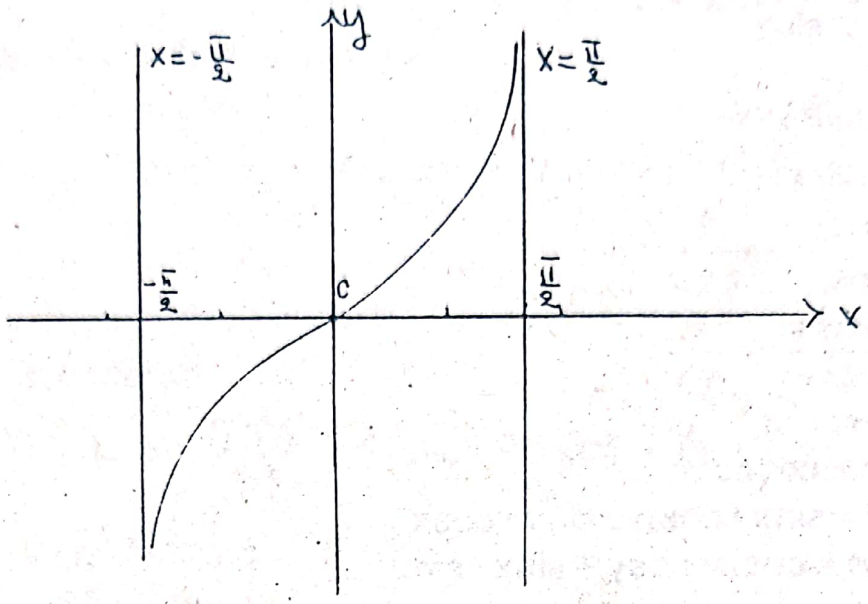


Fig. 81.

Graficul funcţiei f(x) = tgx

d) ctg: $\mathbf{R}-\{Z\pi\} \to \mathbf{R}$, f(x) = ctgx

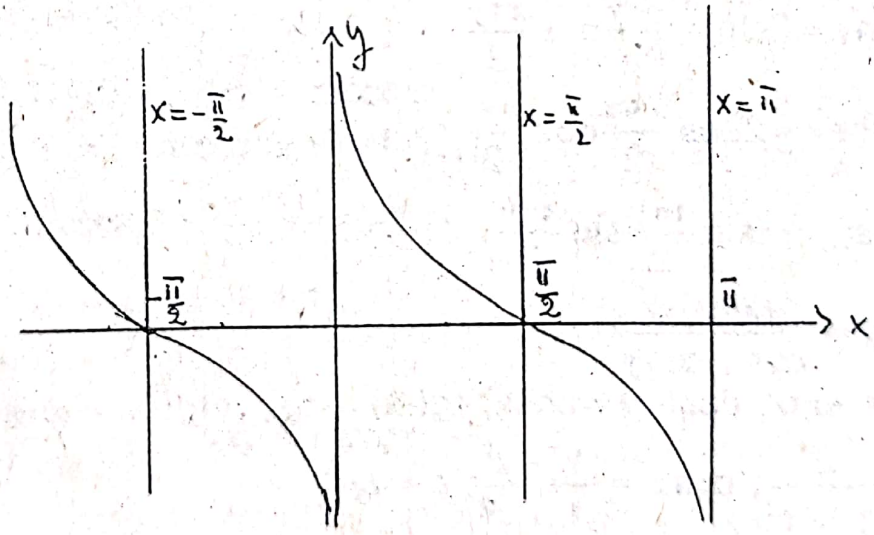


Fig. 82.

Graficul funcţiei f(x) = ctgx

Scanned with OKEN Scanner

e) $\sec x = \frac{1}{\sin x}$; $x \neq \frac{\pi}{2} + Z\pi$

f) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$; $x \neq Z\pi$

Formule utile:

a) $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$

b) $tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{ctgx}$

c) $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{tgx}$

d) $1 + tg^2 = \sec^2 x$

e) $1 + ctg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

f) $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x$

g) $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

h) $tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx \cdot tgy}$

i) $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in Z$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in Z$

$tg(x + k\pi) = tgx$, $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + Z\pi\right\}$, $k \in Z$

$ctg(x + k\pi) = ctgx$, $\forall x \in \mathbb{R} - Z\pi$, $k \in Z$

j) $\sin x \pm \sin y = 2\sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$tgx \pm tgy = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$

k) $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$; $tg(-x) = -tgx$; $ctg(-x) = -ctgx$

l) $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$; $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $t = tg\frac{x}{2}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ avem:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$ nu există;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x$ nu există;

c) $\lim\limits_{x\to x_0} tgx = tgx_0$ dacă $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + Z\pi$;

$\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}+Z\pi} tgx = +\infty$; $\lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{2}+Z\pi} tgx = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to x_0} ctgx = ctgx_0$ dacă $x_0 \neq Z\pi$; $\lim\limits_{x\nearrow Z\pi} ctgx = +\infty$

$\lim\limits_{x\searrow Z\pi} ctgx = -\infty$

Limite standard:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$; $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{tgf(x)}{f(x)} = 1$ dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$;

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$

Inversele funcțiilor trigonometrice:

a) $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\forall x\in[-1,1]$,

$\sin(\arcsin x) = x$, $\forall x\in[-1,1]$,

$\arcsin(\sin x) = x, \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

b) $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$, $f(x) = \arccos x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \forall x\in[-1,1]$,

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x\in[-1,1]$,

$\cos(\arccos x) = x$, $\forall x\in[-1,1]$,

$\arccos(\cos x) = x$, $\forall\in[0,\pi]$.

c) $arctg:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = arctgx$

$arctg(-x) = -arctgx$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$tg(arctgx) = x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$arctg(tgx) = x$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

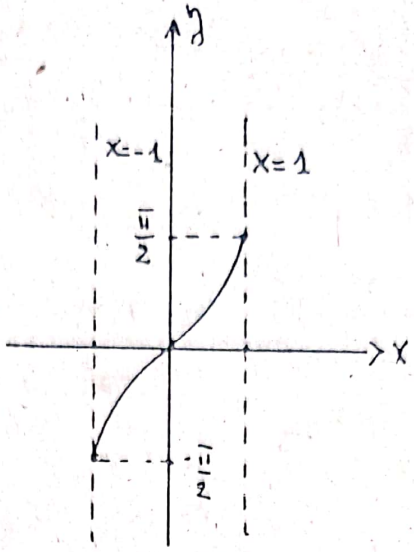


Fig. 83.

Graficul funcţiei f(x) = arcsinx

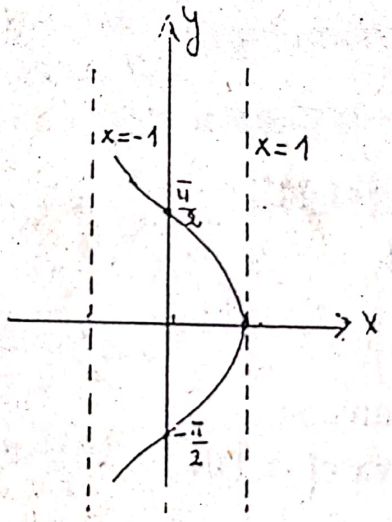


Fig. 84.

Graficul funcţiei f(x) = arccosx

d) $arcctg : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $f(x) = arcctgx$,

$arcctg(-x) = \pi - arcctgx$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$ctg(arcctgx) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$arcctg(ctgx) = x$, $\forall x \in (0,\pi)$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Scanned with OKEN Scanner

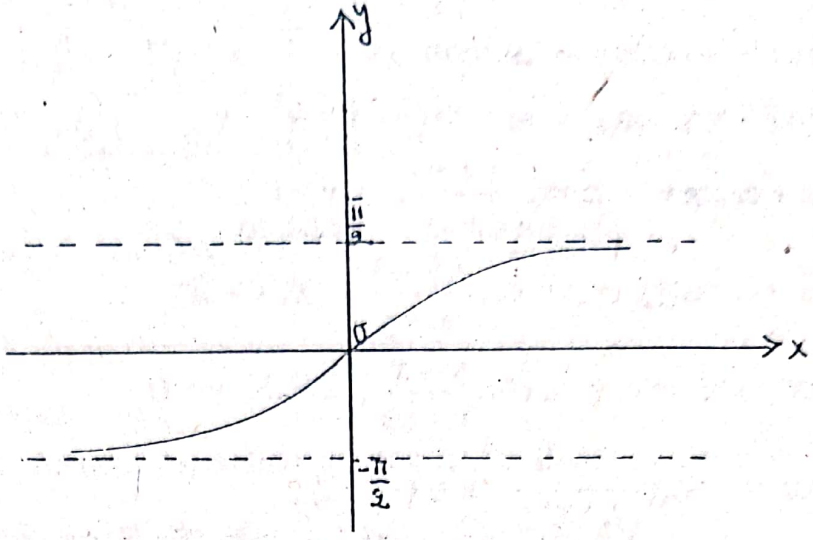


Fig. 85.

Graficul funcției f(x) = arctgx

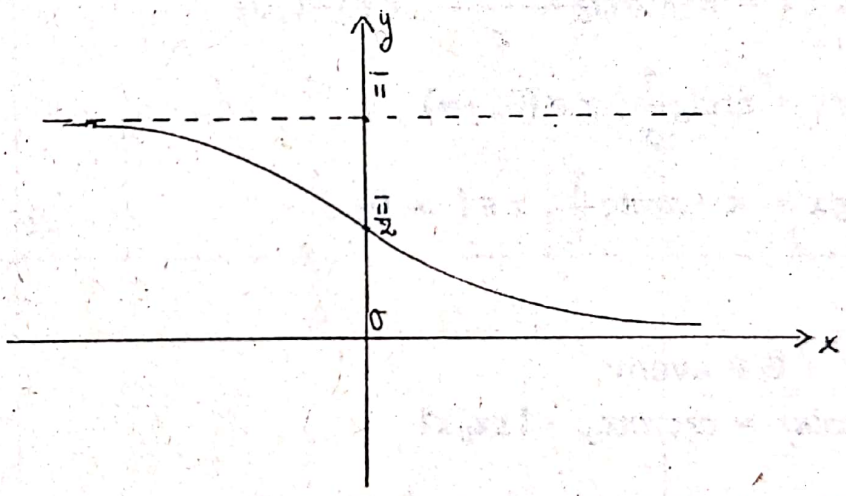


Fig. 86.

Graficul funcţiei f(x) = arcctgx

Alte formule utile:

a) $\arcsin x+\arcsin y = \arccos(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy)$, $0<x, y<1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$, $0<x, y<1$

c) $\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right)$, $0<x, y<1$

d) $\arccos x - \arccos y = \arcsin\left(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}\right)$, $0<x, y<1$

e) $arctgx \pm arctgy = arctg\dfrac{x \pm y}{1 \pm xy}$, $x, y>0$

f) $arcctgx + arcctgy = arcctg\dfrac{xy-1}{x+y}$, $x, y>0$

g) $arcctgx - arcctgy = arctg\dfrac{y-x}{1+xy}$, $x>0$, $y>0$

h) $\arcsin x = arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$

$\arcsin x = -\pi + arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \in [-1,0)$

i) $\arccos x = arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \in (0,1]$

$\arccos x = \pi + arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \in [-1,0)$

j) $arcctgx = arctg\dfrac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$

$arcctgx = \pi + arctg\dfrac{1}{x}$, $x \in (-\infty,0)$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ avem:

- $\lim\limits_{x\to x_0} arcsinx = arcsinx_0$, $-1 \le x_0 \le 1$
- $\lim\limits_{x\to x_0} arccosx = arccosx_0$, $-1 \le x_0 \le 1$
- $\lim\limits_{x\to x_0} arctgx = arctgx_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} arcctgx = arcctgx_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} arcctgx = -\dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$; $\lim\limits_{x\to+\infty} arcctgx = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Limite standard:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\arcsin f(x)}{f(x)} = 1$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{arctg f(x)}{f(x)} = 1$ dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Cazuri particulare: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg x}{x} = 1$

Funcțiile hiperbolice:

Se numesc funcții hiperbolice, funcțiile definite astfel:

a) sinus hiperbolic: $sh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) cosinus hiperbolic: $ch: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

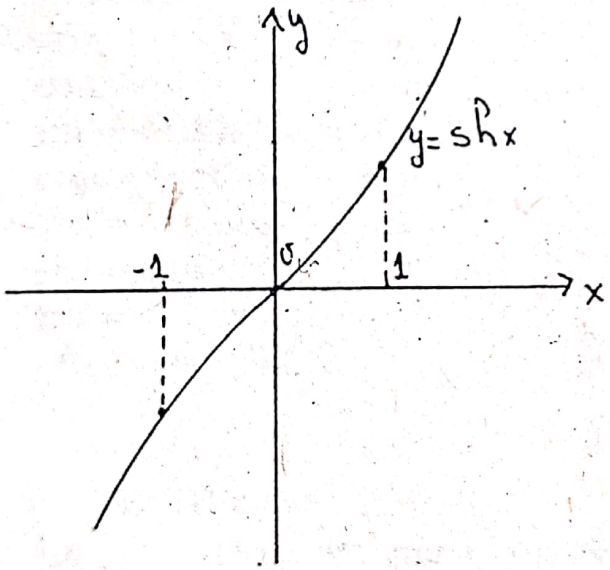


Fig. 87.

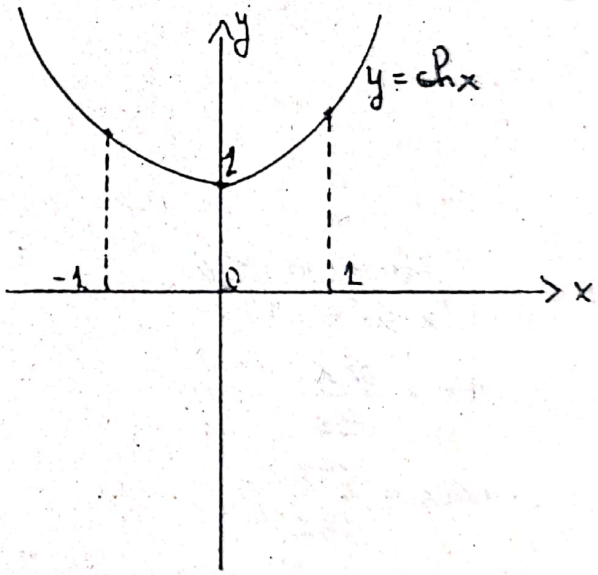


Fig. 88.

c) tangenta hiperbolică: $th: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Scanned with OKEN Scanner

d) cotangenta hiperbolică: cth:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = cthx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

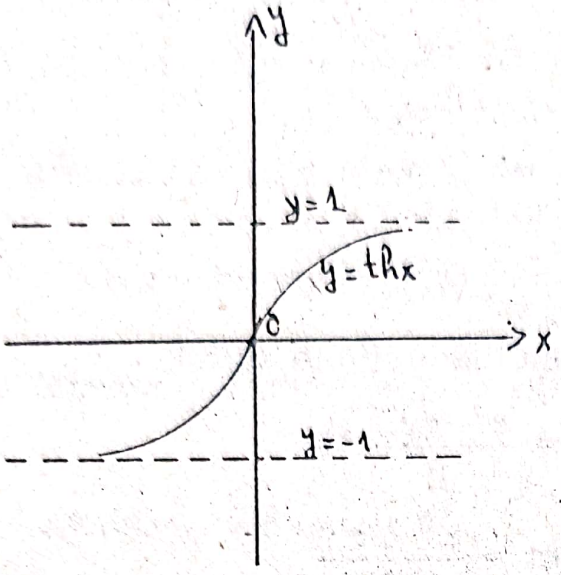


Fig. 89.

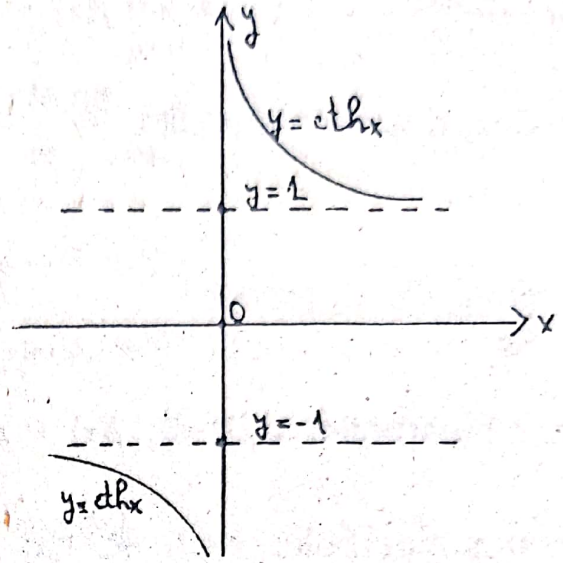


Fig. 90.

Formule utile:

a) $ch^2x - sh^2x = 1$

b) $thx = \dfrac{shx}{chx}$

c) $cthx = \dfrac{chx}{shx}$

d) $sechx = \dfrac{1}{chx}$

e) $cosechx = \dfrac{1}{shx}$

f) $sh(-x) = -shx$
$ch(-x) = chx$
$th(-x) = -thx$
$cth(-x) = -cthx$

g) $sh(x \pm y) = shx \cdot chy \pm shy \cdot chx$

Scanned with OKEN Scanner

h) $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{sh}y$

i) $\mathrm{th}(x \pm y) = \dfrac{thx \pm thy}{1 \pm thx \cdot thy}$

j) $\mathrm{sh}x \pm \mathrm{sh}y = 2\mathrm{sh}\dfrac{x \pm y}{2} \cdot ch\dfrac{x \mp y}{2}$

k) $\mathrm{ch}x - \mathrm{ch}y = 2sh\dfrac{x+y}{2} \cdot sh\dfrac{x-y}{2}$

l) $\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}y = 2ch\dfrac{x+y}{2} \cdot ch\dfrac{x-y}{2}$

m) $\mathrm{th}x \pm \mathrm{th}y = \dfrac{sh(x \pm y)}{chx \cdot chy}$

Relaţii între funcţiile trigonometrice şi funcţiile hiperbolice:

Din formulele lui Euler:

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$e^{-x} = \cos x - i \sin x$, $i = \sqrt{-1}$, $x \in \mathbb{R}$

Avem:

a) $\sin x = -i \cdot \mathrm{sh}ix$
$\cos x = \mathrm{ch}ix$
$\mathrm{tg}x = -i \cdot \mathrm{th}ix$
$\mathrm{ctg}x = i \cdot \mathrm{cth}ix$

b) $\mathrm{sh}x = -i \cdot \sin ix$
$\mathrm{ch}x = \cos ix$
$\mathrm{th}x = -i \cdot \mathrm{tg}ix$
$\mathrm{cth}x = i \cdot \mathrm{ctg}ix$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ avem:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} shx = shx_0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} shx = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} shx = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} chx = chx_0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} chx = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} chx = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} thx = thx_0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} thx = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} thx = -1$

d) $\lim\limits_{x \to x_0} cthx = cthx_0$, $x_0 \neq 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} cthx = -1$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} cthx = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} cthx = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} cthx = +\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Inversele funcţiilor hiperbolice:

Numim funcţii hiperbolice inverse, funcţiile:

a) argument sinus hiperbolic: argsh:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = argshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

b) argument cosinus hiperbolic: argch:$[1, +\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = argchx = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

c) argument tangentă hiperbolică: argth:$(-1,1)\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = argthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$$

d) argument cotangentă hiperbolică: argcth:$(-\infty,-1)\cup(1, +\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = argcthx = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1}$$

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ avem:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} argshx = argshx_0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} argshx = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to\infty} argshx = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} argchx = argchx_0$ *dacă* $x_0 \geq 1$;

$\lim\limits_{x\to\infty} argchx = \pm\infty$

c) $\lim\limits_{x\to x_0} argthx = argthx_0$ *dacă* $-1 < x_0 < 1$;

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} argthx = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} argthx = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to x_0} argcthx = argcthx_0$ *dacă* $x_0 \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} argcthx = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} argcthx = +\infty$

Scanned with OKEN Scanner

IV.4. DEFINIȚIA CONTINUITĂȚII. CONTINUITATEA LA STÎNGA ȘI LA DREAPTA ÎN X_0. OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE.

Funcția $f:E\to\mathbb{R}$, $x_0\in E\subset\mathbb{R}$ este continuă în x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ $\exists$ o vecinătate V a lui x_0, astfel încît $\forall x\in V\cap E$ să avem $f(x)\in U$.

Se scrie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\epsilon>0$, $\exists\delta(\epsilon)>0$, astfel încît $\forall x\in E$ cu $|x-x_0|<\delta(\epsilon)$ să avem $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon \Leftrightarrow$ orice șir x_n convergent la x_0 $(x_n\in E)$ șirul valorilor $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la $f(x_0)$.

x_0 este un punct izolat al mulțimii E dacă $\exists$ o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $V\cap E=\{x_0\}$.

O funcție $f:E\to\mathbb{R}$ este continuă în orice punct izolat al domeniului ei de definiție.

O funcție $f:E\to\mathbb{R}$ este continuă într-un punct de acumulare $x_0\in E$ dacă și numai dacă f are limită în x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$f:E\to\mathbb{R}$ este continuă pe E dacă este continuă în fiecare punct din E.

Funcțiile elementare sînt continue în orice punct din domeniul lor de definiție.

Funcția $f:E\to\mathbb{R}$ este continuă la stînga în x_0 dacă pentru $\forall$ vecinătate U a lui $f(x_0)$, $\exists$ o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi $x\in V\cap E$, $x<x_0$ să avem $f(x)\in U$.

Se scrie $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = l_s = f(x_0-0) = \lim\limits_{x<x_0} = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\epsilon>0$, $\exists\delta(\epsilon)>0$, astfel încît $\forall x\in E$, $x_0-\delta<x<x_0$ să avem $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon \Leftrightarrow$ orice șir $x_n\in E$, $x_n\to x_0$, $x_n\le x_0$, avem $f(x_n)\to f(x_0)$.

Funcția $f:E\to\mathbb{R}$ este continuă la dreapta în $x_0\in E$ dacă pentru $\forall$ vecinătate U a lui $f(x_0)$, $\exists$ o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $\forall x\in V\cap E$, $x>x_0$, să avem $f(x)\in U$.

Se scrie $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = l_d = f(x_0+0) = \lim\limits_{x>x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\epsilon>0$, $\exists\delta(\epsilon)>0$ astfel încît oricare ar fi $x\in E$ cu $x_0<x<x_0+\delta$, să avem $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon \Leftrightarrow$ orice șir $x_n\in E$, $x_n\ge x_0$, $x_n\to x_0$, avem $f(x_n)\to f(x_0)$.

Un punct $x_0\in E$ este punct de discontinuitate a lui f dacă funcția f nu este continuă în x_0.

Scanned with OKEN Scanner

x_0 este punct de discontinuitate de speţa I dacă limitele laterale (care au sens) există sînt finite şi diferite.

x_0 este un punct de discontinuitate de speţa II dacă nu este de speţa I.

OPERAŢII CU FUNCŢII CONTINUE

Dacă funcţiile $f,g:E\to\mathbb{R}$ sînt continue în $x_0\in E\subset R$ atunci:

a) $f+g$ este continuă în x_0; $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=f(x_0)+g(x_0)$.

b) $f-g$ este continuă în x_0; $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=f(x_0)-g(x_0)$.

c) $\alpha\cdot f$ este continuă în x_0, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha\cdot f(x)]=\alpha\cdot f(x_0)$

d) $f\cdot g$ este continuă în x_0; $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=f(x_0)\cdot g(x_0)$

e) $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0; dacă $g(x_0)\neq 0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

f) f^g este continuă în x_0 dacă f^g are sens; $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=[f(x_0)]^{g(x_0)}$

g) $|f|$ este continuă în x_0; $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$.

h) $\sup(f,g)$ şi $\inf(f,g)$ sînt continue în x_0; unde

$$\sup(f,g)=\max(f,g)=\frac{f+g+|f-g|}{2}$$

$$\inf(f,g)=\min(f,g)=\frac{f+g-|f-g|}{2}$$

Fie $f:E_1\to E_2$, $g:E_2\to\mathbb{R}$, $E_1,E_2\subset\mathbb{R}$ şi $h=gof$ numită şi compunerea lui g cu f. Dacă f este continuă într-un punct $x_0\in E_1$ şi g este continuă în $y_0=f(x_0)$, atunci h este continuă în x_0. Dacă f este continuă pe E_1 şi g pe E_2, atunci h este continuă pe E_1.

Se scrie $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=g(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))$ şi se citeşte: "O funcţie comută cu luarea limitei".

Scanned with OKEN Scanner

IV.5. PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIILOR CONTINUE. PROPRIETATEA LUI DARBOUX.

Orice funcţie f continuă pe un interval compact este mărginită şi îşi atinge marginile (Teorema lui Weierstrass de mărginire).

Dacă o funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit [a,b] ia valori de semne contrare la capetele intervalului ($f(a) \cdot f(b) < 0$), atunci există cel puţin un punct $x_0 \in [a,b]$ astfel încît $f(x_0) = 0$.

O funcţie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe [a,b] ia cel puţin o dată valorile cuprinse între marginea sa inferioară şi marginea sa superioară.

Dacă $f,g:E \to \mathbb{R}$ sînt continue în $x_0 \in E$ şi dacă $f(x_0) < g(x_0)$, atunci există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru $\forall x \in V \cap E$ să avem $f(x) < g(x)$.

Dacă $f:E \to \mathbb{R}$ este continuă în x_0 şi $\alpha < f(x_0) < \beta$, atunci $\alpha < f(x) < \beta$ pentru o întregă vecinătate a lui x_0.

O funcţie $f:I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, $I \subset \mathbb{R}$, are proprietatea lui Darboux dacă $\forall a,b \in I$, $a < b$ şi $\forall \xi \in$ intervalului definit de f(a), f(b), $\exists$ cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încît $f(c) = \xi$.

Cu alte cuvinte $f:I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă $\forall a,b \in I$ funcţia f ia pe intervalul (a,b) sau [a,b] toate valorile intermediare între f(a) şi f(b).

Intuitiv, dacă f este o funcţie continuă pe un interval [a,b] şi $f(a) \neq f(b)$, atunci orice dreaptă $y = \xi$ situată între dreptele $y = f(a)$, $y = f(b)$ intersectează graficul neîntrerupt al lui f cel puţin o dată.

Orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Dacă funcţia $f:I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux şi dacă există una din limitele laterale într-un punct $x_0 \in I$, atunci ea este egală cu $f(x_0)$.

Dacă $f:I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux şi nu se anulează în nici un punct din I, atunci funcţia păstrează acelaşi semn pe tot intervalul I.

Dacă $f:I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux atunci f(I) este interval.

Dacă funcţia $f:I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux, atunci ea nu are nici un punct de discontinuitate de prima speţă.

Deoarece o funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux, toate propoziţiile relative la funcţiile cu proprietatea lui Darboux rămîn adevărate şi pentru funcţii continue pe un interval.

Scanned with OKEN Scanner

IV.6. FUNCŢII UNIFORM CONTINUE.

Funcţia $f:E\to\mathbb{R}$ este uniform continuă pe E dacă, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta(\epsilon)>0$ astfel încît, $\forall x',x''\in E$ cu $|x'-x''|<\delta(\epsilon)$, să avem $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$.

Funcţia $f:E\to\mathbb{R}$ este lipschitziană dacă $\exists M>0$ astfel încît $\forall x',x''\in E$ să avem $|f(x')-f(x'')|\leq M|x'-x''|$.

Această inegalitate se numeşte *condiţia lui Lipschitz*.

Orice funcţie uniform continuă este continuă (reciproca în general nu este adevărată).

O funcţie continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă pe această mulţime.

Dacă funcţia $f:E\to\mathbb{R}$ este lipschitziană atunci ea este uniform continuă.

IV.7. IMAGINEA GEOMETRICĂ A UNOR LIMITE.

Admitem ipoteza că majoritatea limitelor de funcţii reale au o interpretare intuitivă geometrică. Noţiunea trecerii la limită este în general greu accesibilă înţelegerii de către elevi.

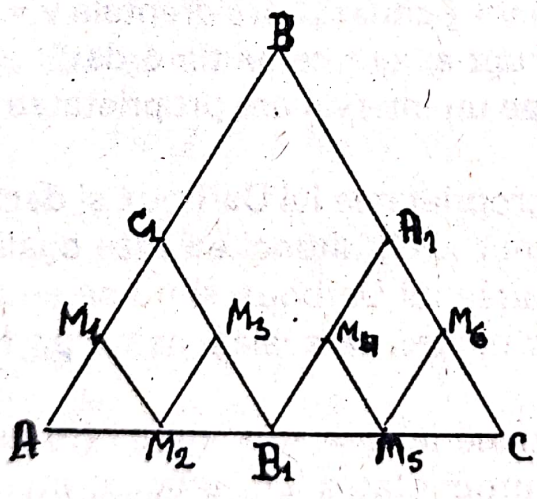


Fig. 91.

De aceea în exerciţii se vor aplica soluţii geometrice care să apeleze la intuiţia elevilor pentru o serie de exerciţii. Atragem atenţia că nu întotdeauna intuiţia duce la rezultate reale după cum se poate vedea din exemplul următor: Fie un triunghi echilateral ABC de latură 1 cu AC_1 +

Scanned with OKEN Scanner

$B_1C_1 + A_1B_1 + A_1C = 2$ deoarece $AC_1 = BC_1 = B_1C_1 = B_1A_1 = A_1B = \frac{1}{2}$.

Construim segmentele $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3B_1 = B_1M_4 = M_4M_5 = M_5M_6 = M_6C = \frac{1}{4}$. Avem $AM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + M_3B_1 + B_1M_4 + M_4M_5 + M_5M_6 + M_6C = 2$. Continuînd procedeul ajungem la un şir a cărui limită este 2, deşi intuitiv suma acestor segmente tinde la segmentul AC care are lungimea 1.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V. DERIVATE. DERIVABILITATE.

V.1. DEFINIȚIA DERIVATEI. DERIVATE LATERALE. DERIVABILITATE.

Spunem că funcția $f:I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ are derivată în punctul $x_0\in I$ dacă există limita finită sau infinită

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\leftrightarrow\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

Deci limita însăși se notează cu $f'(x_0)$ și se citește "derivata funcției f în raport cu x în punctul x_0". În loc de $f'(x_0)$ se mai folosesc pentru derivată notațiile $\frac{df(x_0)}{dx}$, $f_x'(x_0)$. Spunem că funcția $f:I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0\in I$ dacă există limita și este finită:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\leftrightarrow\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

Dacă $f:I\to R$ este derivabilă în $x_0\in I$, atunci f este continuă în punctul x_0 (reciproca nu este în general adevărată).

Interpretarea geometrică a derivatei:

Fie $f:I\to\mathbb{R}$ și graficul funcției f pentru $x\in I$, $G_f=\{(x,f(x))/x\in I, y=f(x)\}$, $\lim_{M\to M_0} tg\alpha=\lim_{M\to M_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=tg\theta$. Prin urmare, derivata funcției f(x), $x\in I$ într-un punct $x_0\in I$ este egală cu tangenta trigonometrică a unghiului pe care îl face tangenta la grafic în punctul $(x_0,f(x_0))$ cu axa OX. Dacă derivata este $+\infty$ sau $-\infty$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, dreapta MQ este paralelă cu Oy. Dacă limita nu există, graficul G_f nu are tangentă unică în punctul M_0 (punctul unghiular) sau tangenta nu există.

Funcția $f:I\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe I dacă este derivabilă în fiecare punct $x\in I$.

Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe o vecinătate V a lui $x_0\in I$ cu derivata $f'(x)$, $x\in V$. Dacă derivata f' este derivabilă în x_0 se spune că f este de două ori derivabilă în x_0 și se scrie $f''(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in V}}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$.

Scanned with OKEN Scanner

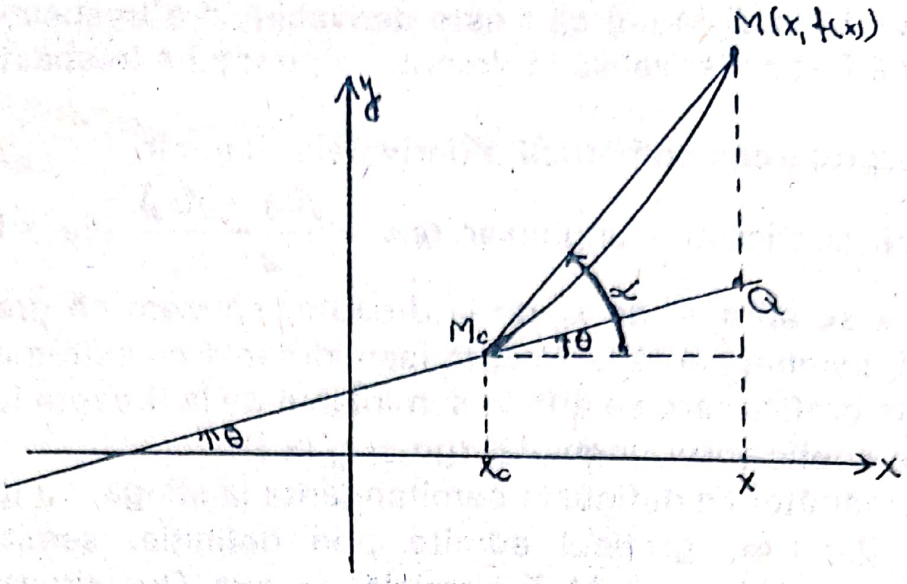


Fig. 92.

În general derivata de ordinul (n) se scrie $f^{(n)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$.

Dreapta trecînd prin M_0 de coeficient unghiular $m = tg\phi = f'(x_0)$ este prin definiţie tangenta în M_0 la grafic şi are ecuaţia: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Fie funcţia $f: I \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in I$. Se spune că funcţia f este derivabilă la dreapta în punctul $x_0 \in I$ dacă raportul $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x > x_0$, $x \in I$ are limită la dreapta finită, în punctul x_0. Această limită se numeşte derivata la dreapta a funcţiei f în punctul x_0 şi se notează $f_d(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Funcţia $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă la stînga în punctul $x_0 \in I$ dacă raportul $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x < x_0$, $x \in I$ are limită la stînga finită, în punctul x_0. Această limită se numeşte derivata la stînga a funcţiei f în punctul x_0 şi se notează $f_s(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ atunci f este derivabilă la stînga şi la dreapta în x_0 şi $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0)$. Reciproc: dacă f este derivabilă la stînga şi la dreapta în x_0 şi dacă $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$, atunci f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $I=[a,b]$ faptul că f este derivabilă în a (respectiv b) revine la aceea că f este derivabilă la dreapta în punctul a (respectiv la stînga în b).

Interpretarea geometrică a derivatelor laterale

Dacă coeficientul unghiular $tg\alpha = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ are o limită finită $tg\alpha_0$ cînd x se apropie de x_0 de la dreapta, spunem că graficul are în punctul M_0 semitangentă la dreapta (semidreaptă cu extremitatea în M_0, tangentă la grafic, care se află în semiplanul de la dreapta lui M_0, $x \geq x_0$ și care are coeficientul unghiular $tg\alpha_0 = f_d'(x_0)$).

Asemănător se definește semitangenta la stînga, cu $tg\alpha_0 = f_s'(x_0)$. Dacă $f_d'(x_0) = +\infty$, graficul admite prin definiție, semitangentă în $(x_0, f(x_0))$, o semidreaptă M_0T paralelă cu axa Oy, situată deasupra punctului M_0.

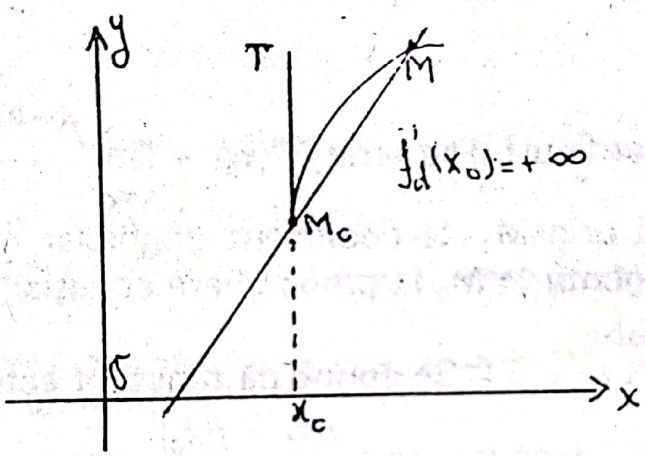


Fig. 93.

Dacă $f_d'(x_0) = -\infty$, graficul admite ca semitangentă la dreaptă în $M_0(x_0, f(x_0))$, semidreapta M_0T paralelă cu axa Oy, situată sub punctul M_0.

Dacă $f_s'(x_0) = +\infty$, graficul admite , prin definiție ca semitangentă la stînga în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, o semidreaptă M_0T paralelă cu axa Oy situată sub punctul M_0.

Dacă $f_s'(x_0) = -\infty$, graficul admite, prin definiție, ca semitangentă la stînga în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, o semidreaptă M_0T paralelă cu axa Oy, situată deasupra punctului M_0.

Scanned with OKEN Scanner

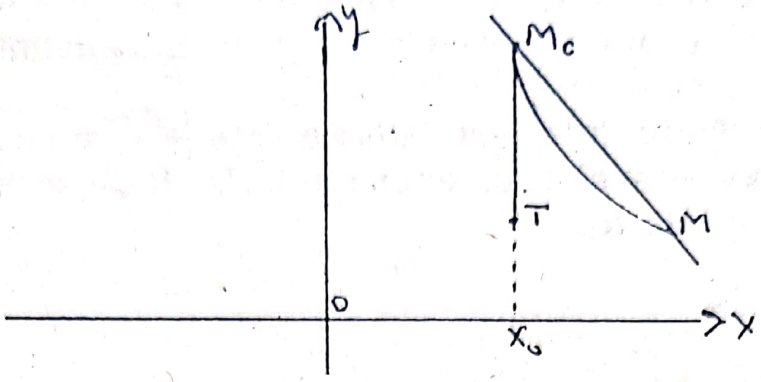


Fig. 94.

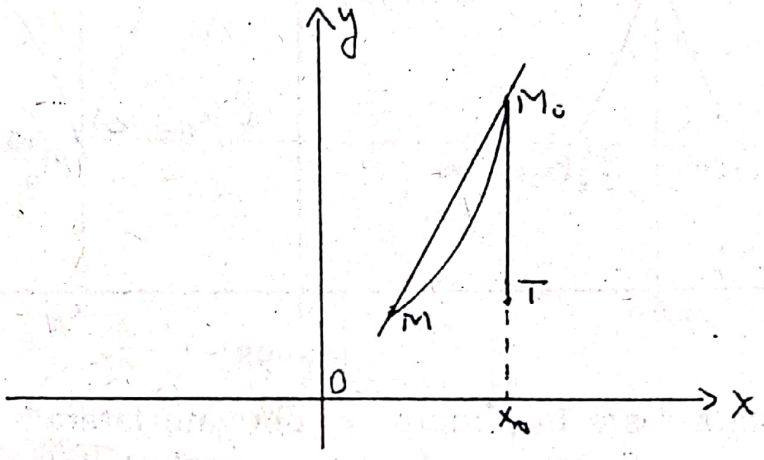


Fig. 95.

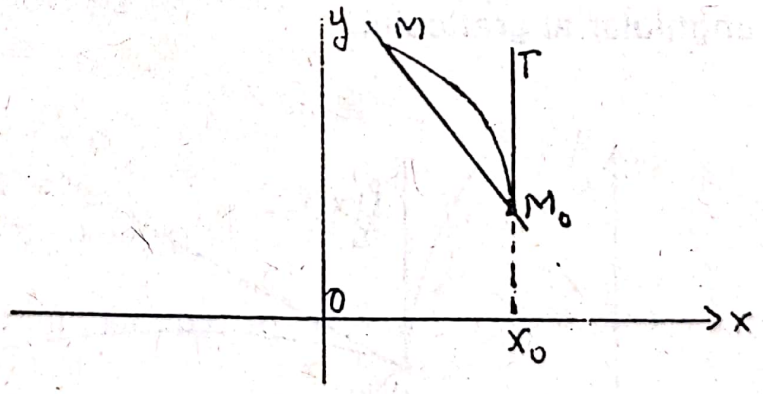


Fig. 96.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă funcţia f are în x_0, $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$, cele două semitangente sînt în prelungire, deci graficul are tangentă în M_0. Dacă funcţia f are în x_0 derivate laterale diferite, cele două semitangente nu mai sînt în prelungire.

Dacă una dintre derivatele laterale este $+\infty$ şi cealaltă este $-\infty$ cele două semitangente sînt suprapuse iar $M_0(x_0, f(x_0))$ se numeşte punct de întoarcere al graficului.

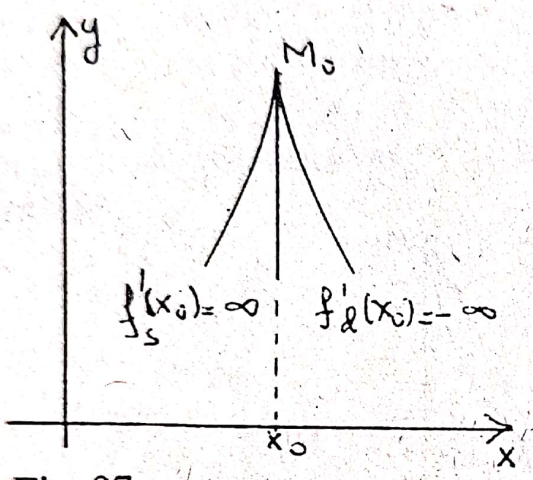


Fig. 97.

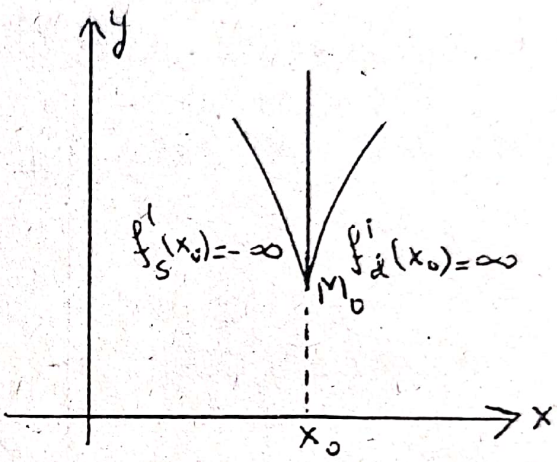


Fig. 98.

Dacă funcţia f are în punctul x_0 derivate laterale diferite şi cel puţin una din ele este finită, cele două semitangente laterale nu sînt nici suprapuse nici în prelungire iar punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numeşte punct unghiular al graficului.

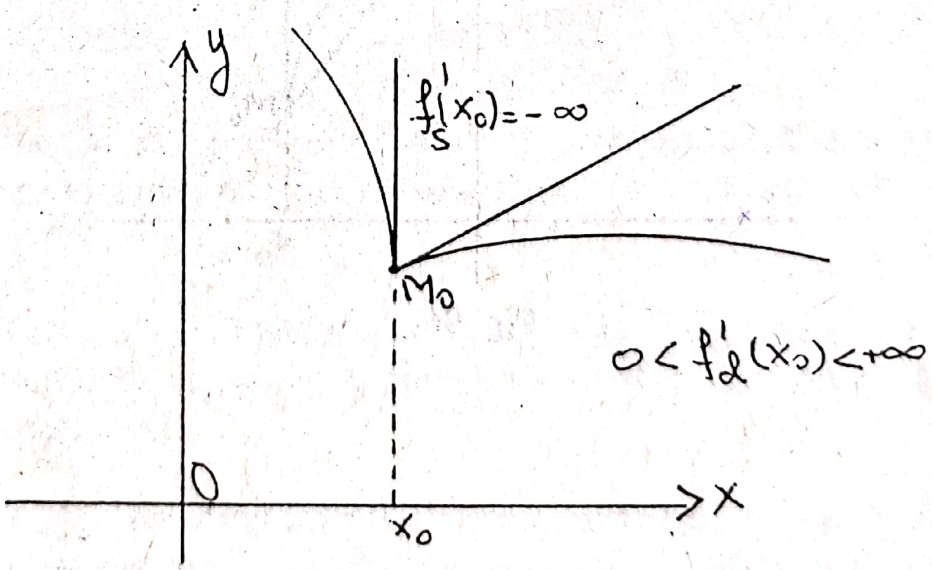


Fig. 99.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă cele două curbe au ecuaţiile $y=f_1(x)$ şi $y=f_2(x)$ atunci unghiul format de tangentele la cele două curbe în punctul M_0 de intersecţie a lor este dat de $tg\,\alpha = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}$.

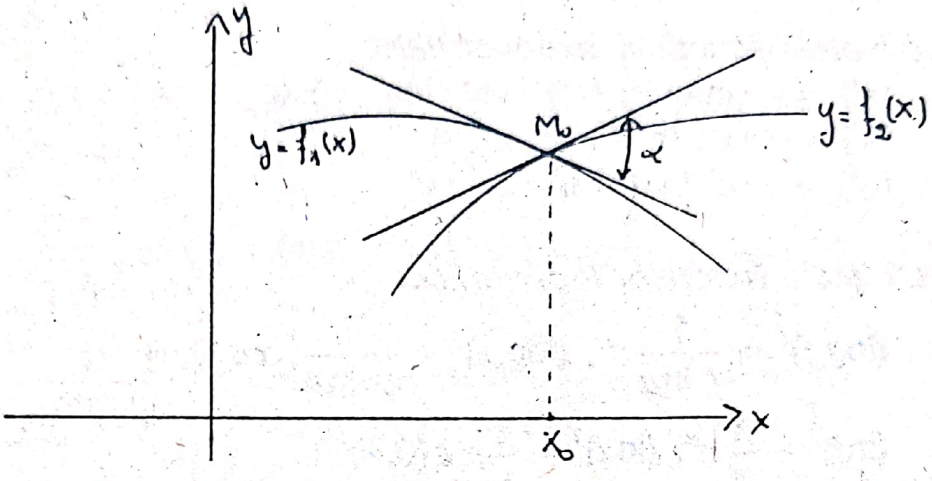


Fig. 100.

V.2. DERIVATE.

a) *Reguli generale de derivare:*

$C'=0$

$X'=1$

$(f+g)'=f'+g'$

$(f-g)'=f'-g'$

$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g';$

Formula lui Leibnitz: $(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}\cdot v^{(n-k)}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)=-\frac{1}{f^2}\cdot f'$$

$(f^n)'=n\cdot f^{n-1}\cdot f';\ (x^n)'=n\cdot x^{n-1}$

$$(\sqrt{f})'=\frac{1}{2\sqrt{f}}\cdot f';\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$(\sqrt[n]{f^m})' = \frac{m}{n\sqrt[n]{f^{n-m}}} \cdot f'; \quad (\sqrt[n]{x^m})' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$$(g \circ f)' = (g(f))' = g'(f) \cdot f'$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} = \frac{1}{f'(f^{-1})}$$

b) *Derivatele funcţiilor exponenţiale:*

$$(a^f)' = a^f \cdot \ln a \cdot f'; \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \ x \in \mathbb{R}$$

$$(e^f)' = e^f \cdot f'; \quad (e^x)' = e^x, \ x \in \mathbb{R}$$

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$$

c) *Derivatele funcţiilor logaritmice:*

$$(\log_a f)' = \frac{1}{f \cdot \ln a} \cdot f'; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \ x \in (0, \infty)$$

$$(\ln f)' = \frac{1}{f} \cdot f'; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$$

$$(\lg f)' = \frac{1}{f \cdot \ln 10} \cdot f'; \quad (\lg_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}, \ x \in (0, \infty)$$

d) *Derivatele funcţiilor trigonometrice:*

$$(\sin f)' = \cos f \cdot f'; \quad (\sin x)' = \cos x, \ x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos f)' = -\sin f \cdot f'; \quad (\cos x)' = -\sin x, \ x \in \mathbb{R}$$

$$(tg f)' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'; \quad (tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi Z\right)$$

$$(ctg f)' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'; \quad (ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \ x \in \mathbb{R} - \pi Z$$

$$(sec f)' = \frac{\sin f}{\cos^2 f} \cdot f'; \quad (sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \ x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2}, + \pi Z\right)$$

$$(cosec f)' = -\frac{\cos f}{\sin^2 f} \cdot f'; \quad (cosec x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}, \ x \in \mathbb{R} - \pi Z$$

e) *Derivatele funcţiilor trigonometrice inverse:*

$$(\arcsin f)' = \frac{1}{\sqrt{1 - f^2}} \cdot f'; \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ x \in (-1, 1)$$

$$(\arccos f)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - f^2}} \cdot f'; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ x \in (-1, 1)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$(arctgf)' = \frac{1}{1+f^2}\cdot f';\ (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$$

$$(arcctgf)' = -\frac{1}{1+f^2}\cdot f';\ (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$$

$$(arcsecf)' = -\frac{1}{f\sqrt{f^2-1}}\cdot f';\ (arcsecx)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ x\in(-\infty,-1)$$
$$\frac{\pi}{2}<y\leq\pi$$

$$(arcsecf)' = \frac{1}{f\sqrt{f^2-1}}\cdot f';\ (arcsecx)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ x\in(1,+\infty)$$
$$0\leq y<\frac{\pi}{2}$$

$$(arccosecf)' = -\frac{1}{f\sqrt{f^2-1}}\cdot f';\ (arccosecx)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ x\in(1,+\infty)$$
$$0<y\leq\frac{\pi}{2}$$

$$(arccosecf)' = \frac{1}{f\sqrt{f^2-1}}\cdot f';\ (arccosecx)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ x\in(-\infty,-1)$$
$$-\frac{\pi}{2}\leq y<0$$

f) *Derivatele funcțiilor hiperbolice:*

$(shf)' = chf\cdot f';\ (shx)' = chx,\ x\in\mathbb{R}$

$(chf)' = shf\cdot f';\ (chx)' = shx,\ x\in\mathbb{R}$

$$(thf)' = \frac{1}{ch^2f}\cdot f';\ (thx)' = \frac{1}{ch^2x},\ x\in\mathbb{R}$$

$$(cthf)' = -\frac{1}{sh^2f}\cdot f';\ (cthx)' = -\frac{1}{sh^2x},\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

$$(sechf)' = -\frac{shf}{ch^2f}\cdot f';\ (sechx)' = -\frac{shx}{ch^2x};\ x\in\mathbb{R}$$

$$(csechf)' = -\frac{chf}{sh^2f}\cdot f';\ (csechx)' = -\frac{chx}{sh^2x};\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

(unde $shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$).

Scanned with OKEN Scanner

V.3. PUNCTE DE EXTREM. TEOREMA LUI FERMAT. MAXIME SAU MINIME.

Fie $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$. Punctul $x_0\in E$ se numește punct de minim relativ, al lui f dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încît pentru orice $x\in V\cap E$ să avem $f(x)\geq f(x_0)$; $f(x_0)$ se numește minim relativ al lui f.

Punctul $x_0\in E$ se numește punct de maxim relativ al lui f dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încît pentru $\forall x\in V\cap E$ să avem $f(x)\leq f(x_0)$; $f(x_0)$ se numește maxim relativ al lui f.

Numim punct de extrem relativ punctul de minim relativ sau punctul de maxim relativ.

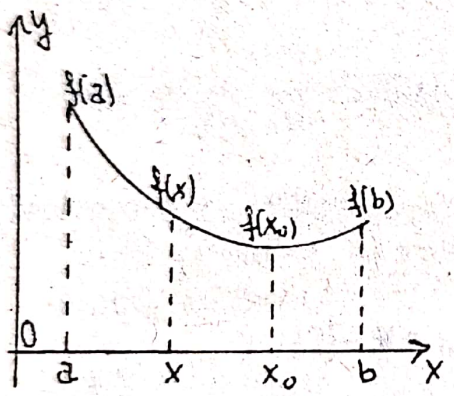


Fig. 101.

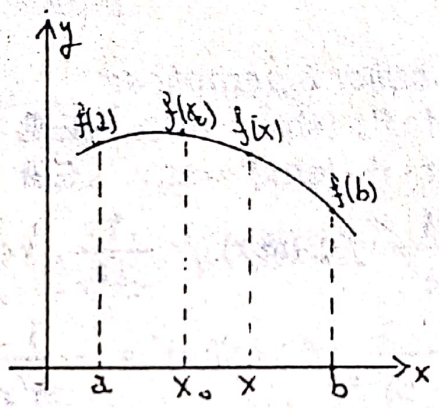


Fig. 102.

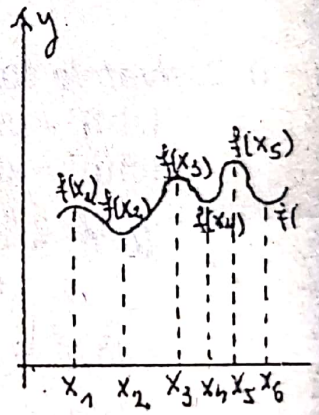


Fig. 103.

Teorema lui Fermat: Fie E un interval deschis (a,b) și $x_0\in(a,b)$ un punct de extrem relativ al unei funcții $f:E\to\mathbb{R}$. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0)=0$ (reciproca nu este în general valabilă).

Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat.

Într-un punct de extrem, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.

Observație: Zerourile derivatei $f'(x)=0$ pe E sînt numite și punctele critice ale lui f pe E dacă f este derivabilă pe $E=(a,b)$.

Teorema afirmă că punctele de extrem local pentru funcțiile derivabile sînt printre punctele critice care se obțin prin rezolvarea ecuației $f'(x)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

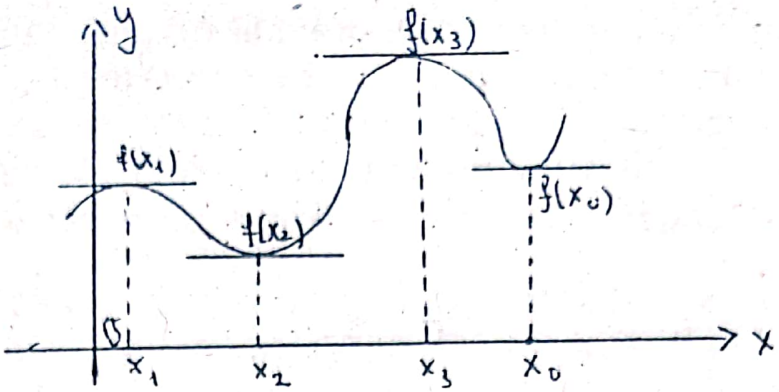


Fig. 104.

Dacă nu cunoaştem semnul derivatei întîi în punctele din jurul lui x_0 atunci putem folosi derivatele de ordin superior ale funcţiei în x_0 pentru a vedea dacă x_0 este punct de extrem.

Fie f o funcţie derivabilă de n ori, $n \geq 2$, într-un punct $x_0 \in E$, astfel încît:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0 = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

a) Dacă n este par, atunci x_0 este punct de extrem allui f, dacă $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ este punct de maxim iar dacă $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ este punct de minim.

b) Dacă n este impar, iar $x_0 \in \text{int}E$, atunci x_0 nu este punct de extrem al intervalului E.

În acest caz tangenta la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Ox şi traversează graficul (punct de inflexiune).

Dacă într-un punct de extrem x_0, avem $f''(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim, iar dacă avem $f''(x_0) < 0$, atunci x_0 este un punct de maxim.

V.4. TEOREMA LUI ROLLE. SEPARAREA RĂDĂCINILOR CU AJUTORUL ŞIRULUI LUI ROLLE

Teorema lui Rolle: fie $f: E \to \mathbb{R}$ şi $a < b$ două puncte din E cu $E \subset \mathbb{R}$. Dacă:

a) funcţia f este continuă pe [a,b]

b) funcţia f este derivabilă pe (a,b)

c) $f(a) = f(b)$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încît $f'(c) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Interpretarea geometrică: Dacă graficul funcției admite tangentă în fiecare punct (cu excepția, eventual, a extremităților) și dacă dreapta care unește extremitățile graficului este paralelă cu axa Ox, atunci există cel puțin un ounct de pe grafic (care nu coincide cu extremitățile graficului) în care tangenta este de asemenea paralelă cu axa Ox.

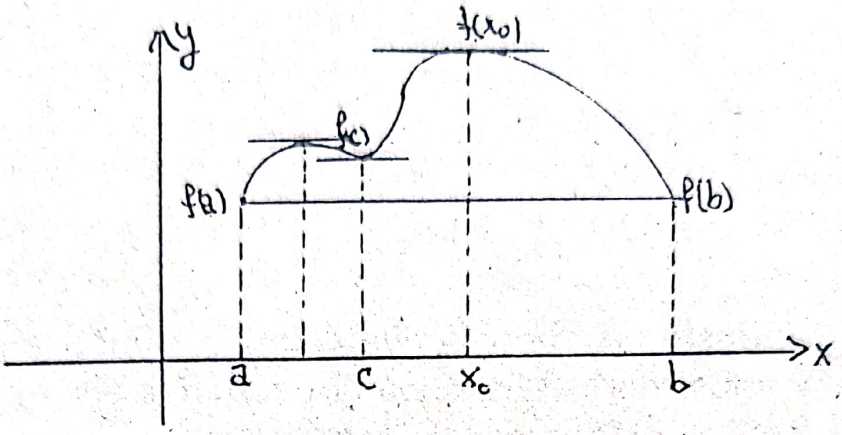


Fig. 105.

Consecință:

a) Între două rădăcini ale funcției se află cel puțin o rădăcină a derivatei (cazul $f(a)=f(b)=0$)

b) Între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a funcției.

Algoritmul de calcul al formării șirului lui Rolle:

a) Se fixează intervalul E de studiu al ecuației $f(x)=0$, funcția $f:E\to R$ fiind presupusă derivabilă.

b) Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$ și se consideră rădăcinile reale ale acestei ecuații situate în E, în ordine crescătoare: $x_m<\ldots<x_1<x_2<\ldots<x_M$.

Se calculează $f(x_m)$, ..., $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_M)$ la care se adaugă limitele lui f, la capetele din stînga respectiv din dreapta ale intervalului E.

c) Datele anterioare se organizează într-un tablou de forma:

x	$-\infty$	x_m	...	x_1	x_2	...	x_M	$+\infty$
f'(x)		0		0	0		0	
f(x)	$f(-\infty)$	$f(x_m)$		$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_M)$	$f(+\infty)$

Scanned with OKEN Scanner

Şirul lui Rolle este şirul semnelor acestor valori (putînd apărea valoarea 0).

Avem:

a) Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, de exemplu $f(x_1)$, $f(x_2)>0$, atunci în intervalul (x_1,x_2) nu există rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x)=0$.

b) dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite, de exemplu $f(x_1)<0$, $f(x_2)>0$, atunci ecuaţia $f(x)=0$ are exact o rădăcină în intervalul (x_1,x_2).

c) Dacă în şirul lui Rolle apare 0, de exemplu $f(x_k)=0$ sau $f(x_{k+1})=0$, atunci x_k sau x_{k+1} este o rădăcină multiplă a ecuaţiei $f(x)=0$ şi în intervalul (x_k,x_{k+1}) nu va exista altă rădăcină a acestei ecuaţii.

În acest mod, numărînd schimbările de semn şi zerourile se determină numărul de rădăcini reale (fără a determina şi ordinele de multiplicitate ale acestora) ale ecuaţiei considerate şi totodată, intervalele în care aceste rădăcini sînt situate.

V.5. TEOREMA LUI LAGRANGE.
(teorema creşterilor finite)

Fie f o funcţie definită pe un interval I şi $a<b$ două puncte din $I\subset R$. Dacă:

a) f este continuă pe [a,b],

b) f este derivabilă pe (a,b),

atunci există cel puţin un punct $c\in(a,b)$, astfel încît să avem:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Alte forme:

a) notînd $a=x$, $b=x+h$, rezultă $c\in(x,x+h)$; există deci un $\phi\in(0,1)$ astfel încît $c=x+\phi h$ şi teorema devine $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\phi h)$.

b) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)$, $a<\xi<x$.

Interpretarea geometrică: Fie $y=f(x)$. Egalitatea $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

Scanned with OKEN Scanner

arată că există cel puțin un punct $a<c<b$ astfel încît tangenta la grafic, în punctul $x_0=c$, să fie paralelă cu coarda AB.

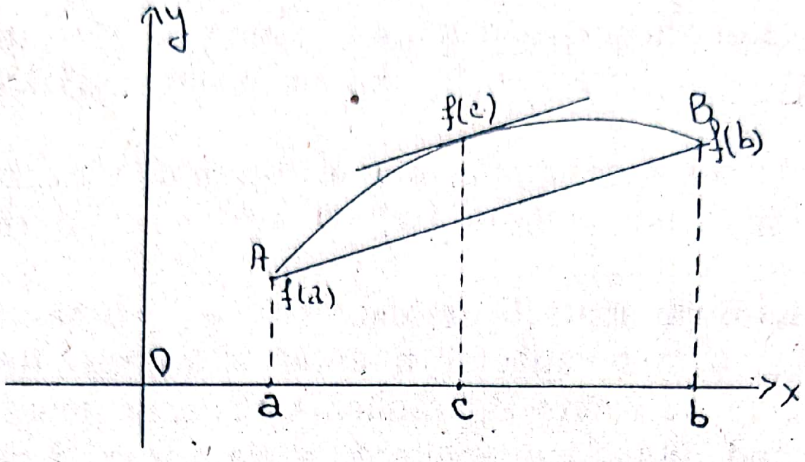


Fig. 106.

Observație: Teorema lui Lagrange conține ca un caz particular teorema lui Rolle, dacă $f(a)=f(b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(b)}{b-a} = 0$.

Consecință: Dacă f are derivata nulă pe un interval I, atunci funcția f este constantă pe acest interval (dacă $f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=c$).

Consecință: Dacă f și g sînt două funcții derivabile pe un interval I și dacă $f'(x)=g'(x)$ pentru $\forall x \in I$, atunci diferența lor $f(x)-g(x)$, este constantă pe I.

Consecință: Fie f o funcție derivabilă pe I.

a) Dacă f' este strict pozitivă pe I, f este strict crescătoare pe I;

b) Dacă f' este strict negativă pe I, f este strict descrescătoare pe I.

Corolar: Fie f o funcție definită într-o vecinătate V a punctului x_0, derivabilă pe $V-\{x_0\}$ și continuă în x_0. Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \lambda$ atunci $f'(x_0)$ există și $f'(x_0)=\lambda$. Dacă λ este finită, atunci f este derivabilă în x_0.

V.6. TEOREMA LUI CAUCHY.

Fie g și g două funcții definite pe un interval I și $a<b$ două puncte din I. Dacă:

a) f și g sînt continue pe [a,b].

Scanned with OKEN Scanner

b) f și g sînt derivabile pe (a,b).
c) $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ atunci $g(a) \neq g(b)$ și există un punct $c \in (a,b)$ astfel încît să avem $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Corolar: Dacă f și g sînt derivabile pe I, dacă g' nu se anulează pe I și dacă $f(a) = g(a) = 0$, atunci pentru orice punct $x \in I$ există un punct ξ, $a < \xi < x$ astfel încît $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

V.7. FORMULA LUI TAYLOR ȘI FORMULA LUI MAC LAURIN

Fie funcţia $f: I \to R$, derivabilă de n ori în punctul $a \in I$. Numim polinom Taylor de gradul n, atașat funcției f în punctul a, polinomul:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a).$$

Egalitatea

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

se numește formula lui Taylor de ordinul n a funcţiei f în vecinătatea punctului a; $R_n(x)$ se numește restul de ordinul n al formulei lui Taylor.

Altă formă a formulei lui Taylor:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

Dacă f este derivabilă de n+1 ori pe I, au loc următoarele egalităţi:

a) Restul lui Taylor $R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \omega(x)$ cu $\lim_{x \to a} \omega(x) = 0$.

b) Restul lui Schlömlich-Roche: $R_n(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n! p} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$ sau

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\phi)^{n-p+1}}{n! p} \cdot f^{(n+1)}(a + \phi h), \quad 0 < \phi < 1.$$

c) Restul lui Cauchy: $R_n = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$ sau

Scanned with OKEN Scanner

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\phi)}{n!} \cdot f^{(n+1)}(a+\phi h);\ 0<\phi<1.$$

d) Restul lui Lagrange $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi),\ a<\xi<x$ sau

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(a+\phi h);\ 0<\phi<1.$$

Dacă în formula lui Taylor luăm a=0, obţinem formula lui Mac Laurin: $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x)$.

Cu ajutorul formulelor lui Taylor şi Mac Laurin se pot dezvolta funcţiile în serie şi deci se pot aproxima.

Exemple de funcţii dezvoltate cu ajutorul formulei lui Mac Laurin şi a restului Lagrange:

a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\phi x},\ x \in R,\ 0<\phi<1$

b) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sin\phi x,\ x \in R,\ 0<\phi<1$

c) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \cos\phi x,\ x \in R,\ 0<\phi<1$

d) $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\phi x)^{n+1}},\ x>-1,\ 0<\phi<1$

e) $(1+x)^k = 1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + \ldots + C_k^n x^n + R_n(x);\ n>0,\ |x|<1$

V.8. REGULILE LUI L'HÔPITAL ŞI APLICAREA LOR LA CALCULUL LIMITELOR

Cu ajutorul regulilor lui l'Hôpital uneori combinate cu alte metode cunoscute se pot calcula în anumite cazuri, limitele care conduc la nedeterminări de forma $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0\cdot\infty; \infty - \infty; \infty^0; 0^0; 1^\infty$.

Teoremă: Fie f şi g două funcţii definite pe $I \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in I$ un punct de acumulare (finit sau infinit). Dacă:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$;

b) f și g sînt derivabile pe I și continue în x_0, cu excepția, eventual, a lui x_0;

c) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\neq x_0$ din I;

d) există $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, finită sau infinită.

Atunci: $g(x)\neq 0$, $\forall x\neq x_0$ din I și $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Teorema lui Cauchy: Fie f și g două funcții definite pe un interval I și un punct $x_0\in I$. Dacă:

a) $f(x_0)=0$ și $g(x_0)=0$;

b) f și g sînt derivabile în x_0;

c) $g'(x_0)\neq 0$,

atunci: există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $g\neq 0$ pentru $x\neq x_0$ din V și $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Această teoremă dă o regulă de calcul care necesită existența derivatelor numai în punctul; x_0, nu și în celelalte puncte vecine cu x_0.

Teoremă: Fie f și g două funcții definite pe un interval I și $x_0\in I$ un punct de acumulare (finit sau infinit).

Dacă:

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (sau $-\infty$);

b) f și g sînt derivabile pe I, cu excepția, eventual, a lui x_0;

c) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\neq x_0$ din I;

d) există $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ finită sau infinită.

Atunci: funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f și g două funcții definite pe I, cu excepția eventual, a lui x_0.

Dacă:

a) funcțiile f și g sînt derivabile de n ori pe I, cu excepția eventual, a lui x_0;

b) $g^{(n)}(x)\neq 0$ pentru $\forall x\neq x_0$ din I;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(i)}(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g^{(i)}(x) = 0$ sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(i)(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g^{(i)}(x) = \infty$, $i=0,1,2,\ldots,n-1$.

d) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{y^{(n)}(x)} = A$, $A\in\mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A$

Celelalte cazuri $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; ∞^0; 0^0; 1^∞ se reduc prin calcule elementare la cazul $\dfrac{0}{0}$ sau $\dfrac{\infty}{\infty}$ după cum urmează.

Fie x_0 un punct de acumulare al intervalului I, f și g două funcţii definite și derivabile pe I, cu excepţia, eventual a lui x_0.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$ atunci sîntem în cazul $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = 0\cdot+\infty$ sau $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = 0\cdot(-\infty)$.

Presupunem că $g(x)\neq 0$, atunci reducem cazul $0\cdot\infty$ la cazul $\dfrac{0}{0}$ și-i aplicăm regula lui l'Hôpital dacă $g'(x)\neq 0$ pentru $x\neq x_0$ din I. Avem:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'}$$

Dacă $f'(x_0)\neq 0$, $\forall x\neq x_0$ din I, atunci $f(x)\neq f(x_0)$, deci $f(x)\neq 0$; $\forall x\neq x_0$ din I și reducem cazul la $\dfrac{\infty}{\infty}$ prin limita:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'}$$

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ avem $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$.

Presupunem că $f(x)\neq 0$ și $g(x)\neq 0$, $\forall x\neq x_0$ din I.

Reducem cazul la $\dfrac{0}{0}$ cu ajutorul limitei:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}\right)'}$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă sîntem în condițiile de aplicabilitate a regulii lui l'Hôpital.

Dacă $f(x)>0$, $\forall x\neq x_0$ din I și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

În condițiile de aplicabilitate a regulii lui l'Hôpital putem scrie:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot\ln f(x)]}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right)'}}$$

dacă $f(x)\neq 1$, $\forall x\neq x_0$ și $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{[\ln f(x)]'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}}$ dacă $g(x)\neq 0$ pentru $x\neq x_0$ din I.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ sîntem în cazul ∞^0 și putem scrie:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot\ln f(x)]}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right)'}}$$

dacă $f(x)\neq 1$, $\forall x\neq x_0$ sau $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[\ln f(x)\cdot g(x)]}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{[\ln f(x)]'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}}$ dacă $g(x)\neq 0$ $\forall x\neq x_0$ și putem aplica regulile lui l'Hôpital.

Dacă $f(x)>0$, $\forall x\neq x_0$ din I și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ *iar* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (sau $-\infty$) atunci sîntem în cazul 1^∞ și putem aplica

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot\ln f(x)]}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right)'}}$$

dacă $f(x)\neq 1$, pentru $x\neq x_0$ sau $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{[\ln f(x)]'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}}$ dacă $g(x)\neq 0$ pentru $x\neq x_0$ din I și se poate aplica regula lui l'Hôpital.

Pe de altă parte putem scrie:

$$\lim_{x\to x_0} f^g=\lim_{x\to x_0}[1+(f-1)]^g=\lim_{x\to x_0}\left\{[1+(f-1)]^{\frac{1}{f-1}}\right\}^{g\cdot(f-1)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(f-1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Totul revine, în cazul 1^{∞}, la cercetarea limitei $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]$.

Sîntem în cazul $0\cdot\infty$ pe care-l putem reduce la $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Avem deci:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)(f(x)-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)'}}$$

sau $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-1}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f(x)-1)'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}}$.

Putem aplica oricare din metodele arătate.

V.9. CALCULUL VALORILOR APROXIMATIVE ALE SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR

Șirul lui Rolle permite determinarea numărului rădăcinilor reale, diferite, ale unei ecuații și precizarea anumitor intervale în care se află cuprinse aceste rădăcini, fără însă a aproxima rădăcinile.

Prezentăm cîteva metode pentru calculul valorilor aproximative ale soluțiilor ecuațiilor.

a) *Metoda înjumătățirii segmentului*

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, o funcție continuă cu $f(a)\cdot f(b)<0$ și ecuația $f(x)=0$.

Algoritmul aproximării rădăcinii.

— Se împarte segmentul [a,b] în două părți egale. Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ atunci $x_0=\frac{a+b}{2}$ este soluție a ecuației.

— Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, dintre segmentele $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ și $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ se alege acela, la extremitățile căruia funcția are semne opuse.

— Fie acest segment $[a_1,b_1]$. Se împarte din nou în două părți egale după care se repetă raționamentul expus.

Scanned with OKEN Scanner

— În final se obține șirul de segmente $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, ..., $[a_n,b_n]$, ..., astfel încît șirul $(a_n)_{1\le n<\infty}$ al extremităților de la stînga formează un șir crescător iar șirul $(b_n)_{1\le n<\infty}$ un șir descrescător și $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. În acest caz $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, reprezintă soluția ecuației date.

A afla pe x_0 cu aproximația ϵ înseamnă a găsi $\xi \in (a,b)$ astfel ca $|x_0-\xi<\epsilon$; ξ se numește o aproximație a lui x_0 cu eroarea ϵ.

b) *Metoda coardei*

Fie $f:[a,b]\to R$, o funcție continuă cu $f(a)\cdot f(b)<0$. Presupunem că derivatele f' și f'' păstrează semn constant pe (a,b). Cu această metodă aproximăm abcisa punctului în care graficul funcției taie axa Ox cu abcisa punctului în care coarda AB, A(a,f(a)), B(b,f(b)) taie axaOx. Fie x_1 punctului în care coarda AB taie axaOx.

Dacă eroarea obținută este mare, se determină o nouă valoare aproximativă a soluției ecuației, intersectînd coarda AB_1 cu axa Ox, $B_1(x_1,f(x_1))$. Extremitatea în care semnul funcției f coincide cu semnul funcției f'' rămîne fixă. Procedeul se poate repeta.

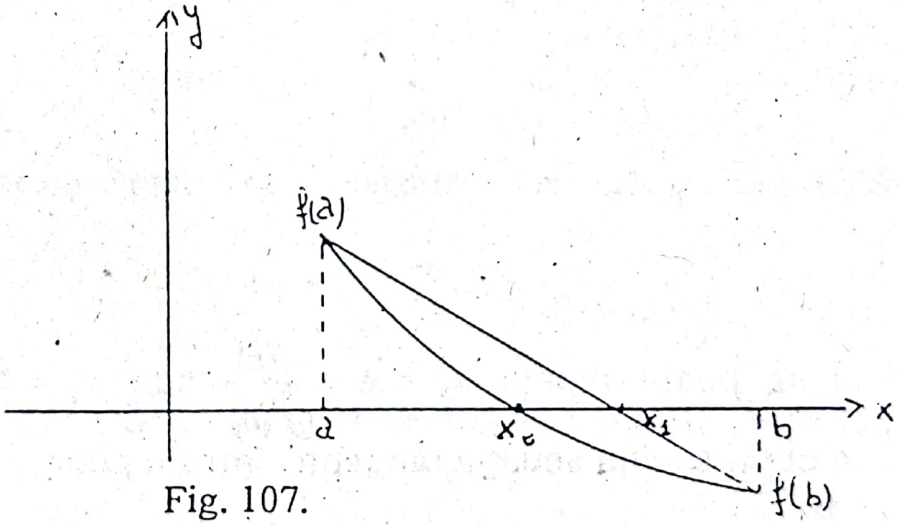


Fig. 107.

Din asemănarea triunghiurilor (ACH) și (BCH) se obține valoarea lui x_1: $x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$

sau $x_1 = \frac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$ (prima aproximare).

Scanned with OKEN Scanner

c) *Metoda tangentei (Newton)*

Această metodă revine la a aproxima abcisa punctului în care graficul funcţiei f taie axa Ox cu abcisa x_1 a punctului în care tangenta la curbă într-un punct al fraficului întîlneşte axa Ox. Punctul în care se duce tangenta reprezintă acea extremitate a intervalului [a,b] în care semnul funcţiei coincide cu semnul funcţiei f". Se presupune că $f(a) \cdot f(b) < 0$ şi că f' şi f" sînt continue şi păstrează semn constant pe [a,b].

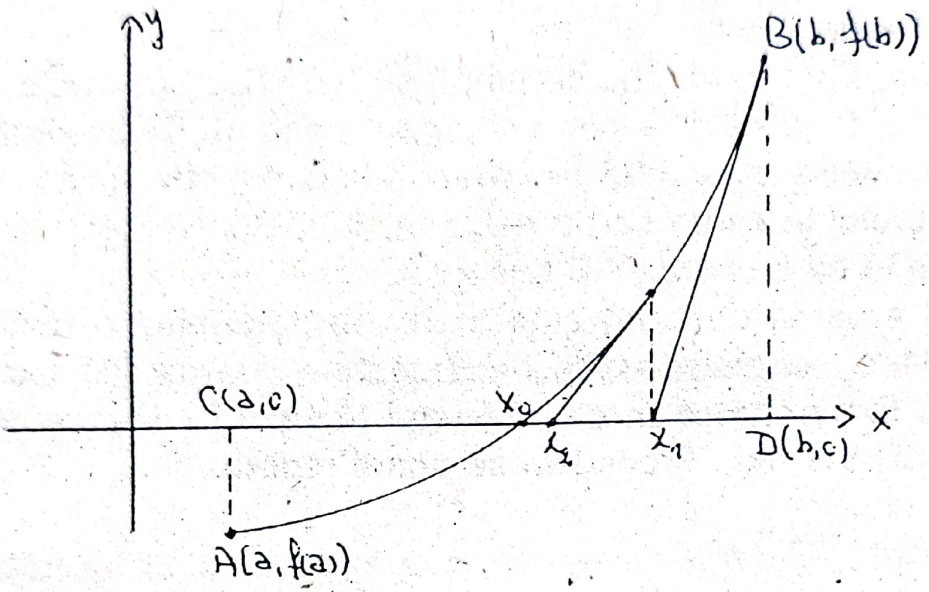


Fig. 108.

Procedeul se poate repeta $x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ sau $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$. Aceste relaţii se obţin scriind ecuaţia tangentei într-un punct la o curbă şi făcînd pe $y = 0$.

d) *Metoda grafică*

Rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ se găsesc la intersecţia curbei de ecuaţie $y = f(x)$ cu axa Ox.

În cazul cînd graficul funcţiei f(x) se construieşte mai greu, scriem funcţia f(x) ca diferenţă a două funcţii $f(x) = g(x) - h(x)$ şi desenăm graficele celor două funcţii. Abcisele punctelor de intersecţie ne dau rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

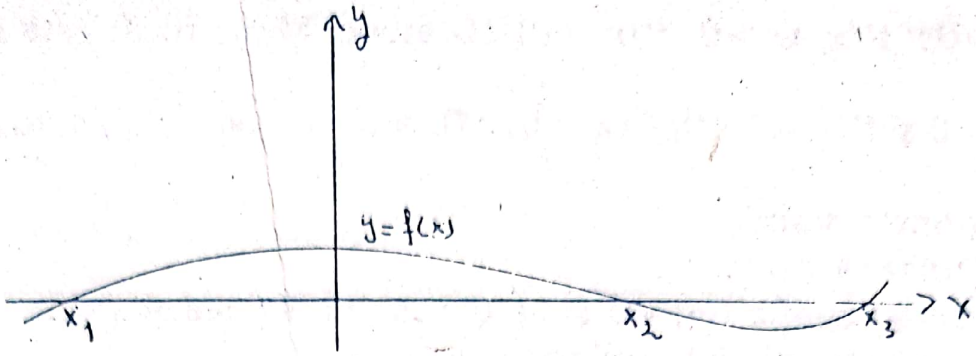


Fig. 109.

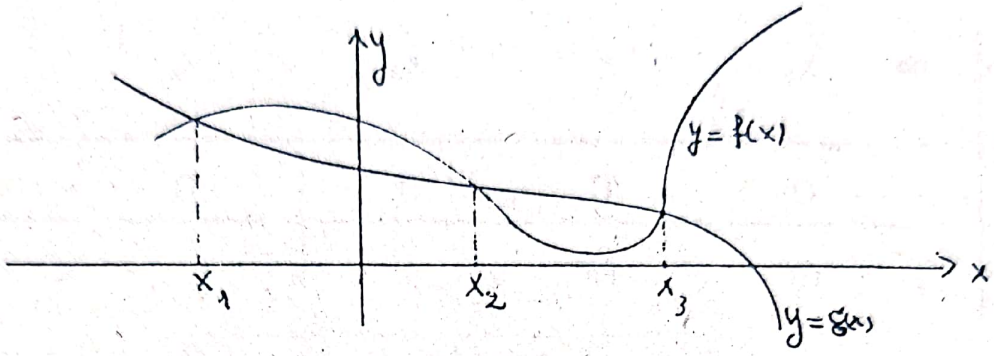


Fig. 110.

Metoda este rar utilizată din cauza impreciziei calculării rădăcinilor.

V.10. ROLUL DERIVATELOR ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR.

Rolul derivatei I

Cu ajutorul derivatei I putem găsi intervalele unde funcția f este crescătoare, descrescătoare, constantă și punctele de maxim și minim relativ.

Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe un interval I și $x_0\in I$.

Dacă:

a) $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in I$, atunci funcția f este crescătoare pe I.

b) $f'(x)\leq 0$, $'x\in I$, atunci funcția f este descrescătoare pe I.

c) $f'(x)=0$, $'x\in I$, atunci funcția f este constantă pe I.

Scanned with OKEN Scanner

d) $f'(x)=0$ și $f'(x_0-0)>0$, $f'(x_0+0)<0$ atunci $M(x_0, f(x_0))$ este punct de maxim.

e) $f'(x_0)=0$ și $f'(x_0-0)<0$, $f'(x_0+0)>0$, atunci $m(x_0, f(x_0))$ este punct de minim.

Algoritm practic:

a) Se calculează $f'(x)$

b) Se rezolvă ecuația $f(x)=0$ și se găsesc rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

c) Se întocmește tabelul următor:

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3	...	x_k	...	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	-	0	-	
$f(x)$	↘	m	↗	M	↘		↘		↘	

În acest tabel semnele derivatei întîi au fost alese la întîmplare, doar pentru a ilustra monotonia și maximele și minimele funcției f.

Rolul derivatei a II-a

Cu ajutorul derivatei a II-a putem găsi intervalele de convexitate și concavitate cît și punctele de inflexiune (unde curba trece de la concavitate la convexitate sau invers) ale funcției $f:I\to R$, derivabilă de două ori pe I.

Dacă:

a) $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in I$ atunci funcția I este convexă.

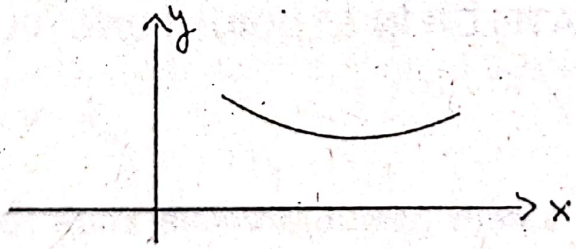


Fig. 111.

b) $f''(x)\leq 0, \forall x\in I$ atunci funcția f este concavă.

c) $f''(x)=0$ și $f''(x_0-0)>0$, $f''(x_0+0)<0$ atunci x_0 este punct de inflexiune pentru f.

Scanned with OKEN Scanner

b)

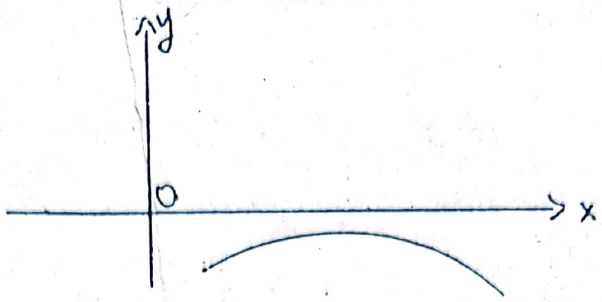


Fig. 112.

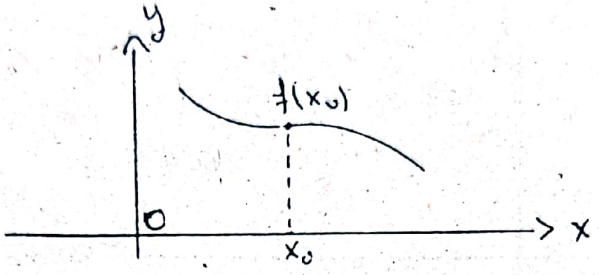


Fig. 113.

d) $f''(x_0)=0$ și $f''(x_0-0)<$, $f''(x_0+0)>0$ atunci x_0 este punct de inflexiune pentru f.

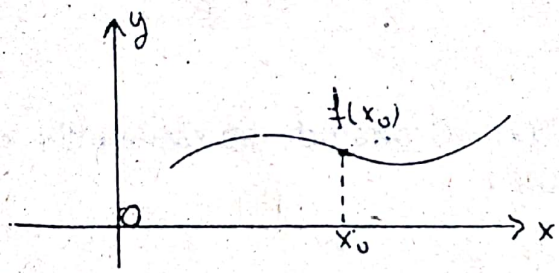


Fig. 114.

e) $f'(x_0)=0$ și dacă $f''(x_0)>0$ atunci $m(x_0,f(x_0))$ este un punct de minim local.

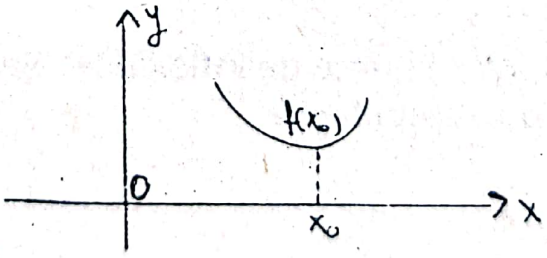


Fig. 115.

Scanned with OKEN Scanner

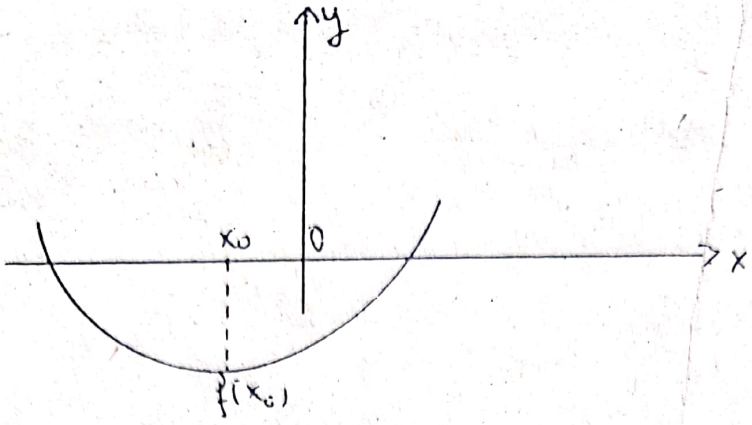


Fig. 116.

f) $f'(x_0)=0$ și dacă $f''(x_0)<0$ atunci $M(x_0, f(x_0))$ este un punct de maxim local.

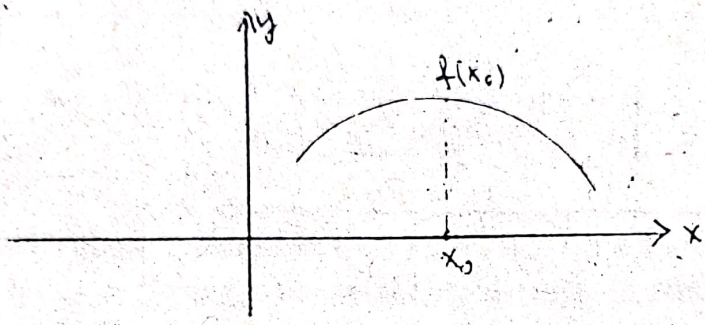


Fig. 117.

Algoritm practic:

a) Se calculează $f''(x)$

b) Se rezolvă ecuaţia $f''(x)=0$ găsindu-se rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_l$.

c) Se întocmește tabelul:

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3		x_l	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	+
$f(x)$		I_1		I_2		I_3			

unde $I_i(x_i, f(x_i))$, $i=1,2,3$, sînt puncte de inflexiune. Semnele lui $f''(x)$ au fost alese aleator, pentru exemplificare.

Scanned with OKEN Scanner

V.11. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR.

Pentru reprezentarea grafică a funcţiilor se recomandă a parcurge următoarele etape (în cazul funcţiilor mai simple, uneori pot să lipsească una sau mai multe etape sau să nu se respecte exact ordinea):

a) Domeniul de definiţie
b) Intersecţia cu axele
c) Simetrii
d) Periodicitate
e) Continuitate
f) Derivabilitate
g) Monotonie, puncte de extrem
h) Convexitate, concavitate, puncte de inflexiune
i) Asimptote verticale, orizontale, oblice
j) Tabelul de variaţie
k) Trasarea graficului

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI. CALCUL INTEGRAL

VI.1. PRIMITIVE

Spunem că funcţia $f:I\to\mathbb{R}$, $I\subseteq\mathbb{R}$, I interval, admite primitive pe intervalul I dacă există o funcţie $F:I\to\mathbb{R}$, derivabilă şi continuă pe I astfel încît $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$. Mulţimea tuturor primitivelor lui f se numeşte integrala nedefinită a funcţiei f şi se notează

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\ C \text{ constantă.}$$

Operaţia de calculare a primitivelor unei funcţii se numeşte integrare.

Proprietăţi ale primitivelor

1) Dacă f are primitive pe un interval I şi $\alpha\in\mathbb{R}^*$, atunci funcţia αf are primitive pe I şi

$$\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx$$

2) Dacă f şi g au primitive pe un interval I şi $m,n\in\mathbb{R}^*$, atunci şi funcţia $mf+ng$ are primitive pe I şi

$$\int [mf(x)+ng(x)]dx=m\int f(x)dx+n\int g(x)dx$$

Formula de integrare prin părţi

Dacă f şi g sînt două funcţii definite pe un interval I şi au derivate continue f' şi g' pe I atunci avem: $\int f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx$ sau altfel spus $\int udv=uv-\int vdu$.

Prima formulă de schimbare de variabilă

Fie funcţiile $\phi:I\to J$ şi $f:J\to\mathbb{R}$, I şi J intervale din $\mathbb{R}$. Dacă ϕ este derivabilă pe I şi f are primitive pe J atunci funcţia $f(\phi(x))\cdot\phi'(x)$ are primitive pe I. În acest caz dacă $\int f(t)dt=F(t)+C$ atunci $\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)dx=F(\phi(x))+C$.

A doua metodă de schimbare de variabilă

Fie funcţiile $\phi:I\to J$ şi $f:J\to\mathbb{R}$, (I,J intervale din $\mathbb{R}$) cu proprietăţile: a) ϕ este bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I; b) Funcţia $h=(f\circ\phi)\cdot\phi'$ admite primitive. Atunci funcţia f admite primitive şi $\int f(x)dx=(H\circ\phi^{-1})(x)+C$ unde H este o primitivă a funcţiei h.

Primitivele unor funcţii uzuale

Presupunem că primitiva funcţiei f este calculată pe un interval I pe care f posedă primitive. Funcţia compusă f o presupunem derivabilă cu derivată continuă.

1. $\int 0\,dx=C$, C constantă reală.

Scanned with OKEN Scanner

2. $\int dx = x + C$

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$

$\int \varphi^n(x) \cdot \varphi'(x)\, dx = \frac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1} + C,\ n \neq -1.$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0$

$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C,\ \varphi(x) \neq 0$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}.$

$\int a^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)\, dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

$\int e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)\, dx = e^{\varphi(x)} + C$

7. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ x \in \mathbb{R} - \{-a, a\},\ a \neq 0$

$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a}\right| + C,\ \varphi(x) \neq \pm a,\ a \neq 0$

8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,\ x \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi(x)}{a} + C,\ a \neq 0$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C,\ x \in \mathbb{R} - [a, a],\ a > 0$

$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}} dx = \ln|\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - a^2}| + C,\ a > 0;\ \varphi(x) \neq \pm a$

10. $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}} dx = \arcsin \frac{\varphi(x)}{a} + C,\ a > 0,\ -a < \varphi(x) < a$

11. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,\ x \in \mathbb{R}$

$\int \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\, dx = -\cos \varphi(x) + C$

12. $\int \cos x\, dx = \sin x + C,\ x \in \mathbb{R}$

Scanned with OKEN Scanner

$$\int \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \sin\varphi(x) + C$$

13. $\int tgx\,dx = -\ln|\cos x| + C,\ x \in \mathbb{R} - \{(2K+1)\frac{\pi}{2}/K \in Z\}.$

$$\int tg(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = -\ln|\cos\varphi(x)| + C,\ \varphi(x) \notin \{(2K+1)\frac{\pi}{2}/K \in Z\}$$

14. $\int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C,\ x \in \mathbb{R} - \{K\pi/K \in Z\}.$

$$\int ctg(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \ln|\sin\varphi(x)| + C,\ \varphi(x) \notin \{K\pi/K \in Z\}.$$

15. $\int \sin^m px\,dx = -\frac{\sin^{m-1}px\cdot\cos px}{mp} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}px\,dx;$

$p \neq 0,\ m = 1, 2, 3, \ldots$

16. $\int \cos^m px\,dx = \frac{\sin px\cdot\cos^{m-1}px}{mp} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}px\,dx;$

$p \neq 0,\ m = 1, 2, 3, \ldots$

17. $\int tg^m x\,dx = \frac{tg^{m-1}x}{m-1} - \int tg^{m-2}x\,dx,\ m \geq 2.$

18. $\int ctg^m x\,dx = -\frac{1}{m-1}ctg^{m-1}x - \int ctg^{m-2}x\,dx,\ m \geq 2.$

19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln tg\frac{x}{2} + C;$

20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + C$

21. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,\ x \notin \{K\pi/K \in Z\}.$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}\,dx = -ctg\varphi(x) + C,\ \varphi(x) \notin \{K\pi/K \in Z\}.$$

22. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,\ x \notin \{(2K+1)\frac{\pi}{2}/K \in Z\}$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}\,dx = tg\varphi(x) + C,\ \varphi(x) \notin \{(2k+1)\frac{\pi}{2}/K \in Z\}$$

23. $\int sh\,x\,dx = ch\,x + C$

24. $\int ch\,x\,dx = sh\,x + C$

25. $\int th\,x\,dx = \ln ch x + C$

Scanned with OKEN Scanner

26. $\int cth\,x\,dx = \ln sh\,x + C$

27. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + C$

28. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,xc + C$

Calculul primitivelor de forma:

$\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_k]{ax+b})\,dx$, unde R este o funcţie raţională de k+1 variabile. Dacă n = c.m.m.m.c($n_1, n_2, \ldots, n_k$) se face substituţia $\sqrt[n]{ax+b} = \sqrt[n]{(ax+b)^{m_i}} = t^{m_i}$; $x = \frac{1}{a}(t^n - b)$ şi primitiva devine

$$\int \mathbb{R}\left(\frac{t^n - b}{a}, t^{m_1}, t^{m_2}, \ldots t^{m_k}\right).$$

Calculul primitivelor de forma:

$$\int \mathbb{R}(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx; \quad \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t.$$

Calculul primitivelor de forma:

$\int \mathbb{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ cu $ax^2+bx+c \geq 0$, $\forall x \in I \subset \mathbb{R}$.

Se fac substituţiile lui Euler.

Dacă: $a \geq 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$

$c \geq 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$

$b^2 - 4ac \geq 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_0)$

Calculul primitivelor de forma:

1. $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

2. $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

3. $\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ (p(x), polinom);

Scanned with OKEN Scanner

4. $\int \frac{dx}{(px+q)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$

Pentru 1. și 2. se face substituția $x + \frac{b}{2a} = t$.

Pentru 3. $\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Se derivează expresia și se găsește Q(x) de gradul n-1 și valoarea lui λ.

Pentru 4. se notează $px + q = \frac{1}{t}$.

Calculul primitivelor binome: $\int x^m (ax^n + b)^p\,dx$;

$a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in Q$

Dacă:

1. $p \in Z$, $p < 0$, $x = z^N$, unde N este numitorul comun al numerelor m și n.

2. $\frac{m+1}{n} \in Z$ se notează $ax^n + b = z^S$ unde s este numitorul fracției $p = \frac{r}{s}$

3. $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, $ax^n + b = z^S x^n$

Calculul primitivelor de forma: $\int \mathbb{R}(\sin x, \cos x)\,dx$

Se face substituția $t = tg\frac{x}{2}$ unde $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Dacă integrala este impară în sinx putem nota cosx = t; impară în cosx notăm sinx = t; cînd termenii sînt de gradul doi notăm tgx = t.

Calculul primitivelor de funcții hiperbolice: $\int \mathbb{R}(sh x, ch x, e^x)\,dx$

Se notează $e^x = t$ și se folosesc formulele: $sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

VI.2 INTEGRALA ÎN SENSUL LUI RIEMANN. APLICAȚII PRACTICE ALE INTEGRALEI

Fie [a,b] un interval închis și mărginit, $[a\ ,\ b] \subset \mathbb{R}$. Un sistem de puncte din [a,b] notat $\Delta = (x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n)$ se numește diviziune a intervalului [a,b] dacă $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Norma diviziunii Δ se notează

$$||\Delta|| = \max([\ x_0\ ,\ x_1], [x_1\ ,\ x_2], \ldots, [x_{n-1}\ ,\ x_n\ ]) = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$$

Se numește sumă Riemann asociată funcției f, diviziuni Δ și punctele intermediare ξ_i, numărul $\delta_\Delta(f\ ,\ \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$, unde $f:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$, $[a\ ,\ b]$ interval mărginit, $\Delta = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $(1 \le i \le n)$.

Funcția $f:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ se numește integrabilă Riemann dacă există un număr real I_f cu proprietatea: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice diviziune Δ a intervalului [a,b] cu $||\Delta|| < \eta_\varepsilon$ și orice puncte intermediare $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ $(1 \le i \le n)$ are loc egalitatea $|\delta_\Delta(f\ ,\ \xi) - I_f| < \varepsilon$. Numărul real I_f se numește integrala definită a funcției f pe intervalul [a,b] și se notează $I_f = \int_a^b f(x)\,dx$.

Observație:

a. I_f este unic determinat;

b. o funcție integrabilă $f:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ este mărginită dacă $|f(x)| \le M$, $\forall x \in [a\ ,\ b]$.

c. integrala definită este un număr real.

Formula lui Leibniz-Newton: Dacă $f:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Proprietăți ale funcției integrabile $f\ ,\ g:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$

a) $\forall \lambda\ ,\ \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ este integrabilă și

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $c \in (a\ ,\ b)$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

c) $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ dacă a = b; $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

d) Dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a\ ,\ b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

e) Dacă $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a\ ,\ b]$ avem $m(a-b) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

f) Dacă $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a\ ,\ b]$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

În mulţimea funcţiilor $f: [a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$, unde [a,b] este un interval mărginit dacă notăm cu: D clasa funcţiilor derivabile, C clasa funcţiilor continue, P clasa funcţiilor care admit primitivă, D_a clasa funcţiilor cu proprietatea lui Darboux, M_0 clasa funcţiilor monotone, I clasa funcţiilor integrabile, M clasa funcţiilor mărginite şi B clasa funcţiilor bijective avem următoarea diagramă:

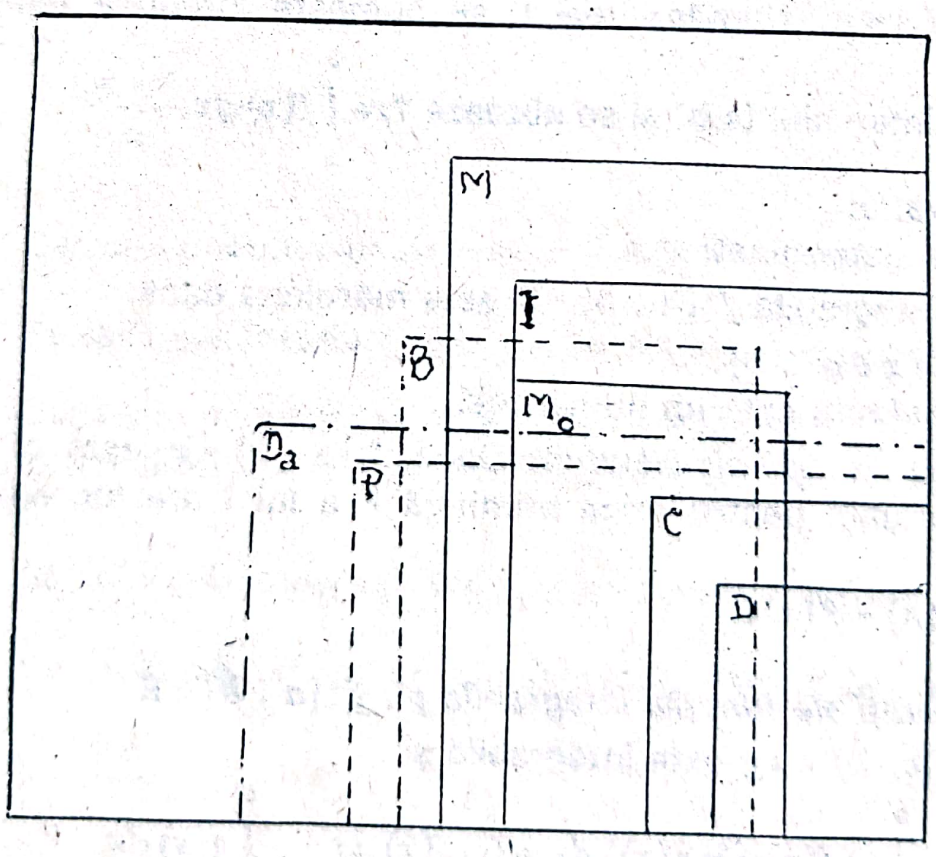


Fig. 118.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple:

a) $C \subset P$ orice funcţie continuă este primitivabilă.

b) $D_a\text{-}C \neq \varphi$. Există funcţii cu proprietatea lui Darboux discontinue.

c) $M_0 \subset I$. Orice funcţie monotonă este integrabilă.

d) $C \subset I$. Orice funcţie continuă este integrabilă.

Notînd cu $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ şi $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $S_\Delta(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$

$S_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ se numesc sumele Darboux inferioară, respectiv superioară asociate funcţiei f şi diviziunii Δ. Între sumele Darboux şi suma Riemann avem relaţiile $s_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f, \xi) \leq S_\Delta(f)$.

Fie funcţia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ a funcţiei mărginită. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

a) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon > 0$ astfel încît $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$, oricare ar fi Δ cu $||\Delta|| < \eta_\varepsilon$.

b) funcţia f este integrabilă.

Proprietăţi

a) Teorema de medie: Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci $\exists \xi \in [a, b]$ astfel încît $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(\xi)$.

b) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, f continuă.

c) Dacă $[c,d] \subset [a,b]$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [c,d]$, $\int_a^d f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$.

d) Formula de integrare prin părţi: Dacă $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ sînt două funcţii derivabile, cu derivate continue, atunci:

$$\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = f(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x)\,dx$$

e) Formula de schimbare de variabilă. Fie $[a, b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, două funcţii cu proprietăţile: f continuă pe J, φ derivabilă cu derivată

Scanned with OKEN Scanner

continuă pe [a,b] atunci $\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$.

f) Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue. Pentru orice funcţie continuă $f:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$, funcţia $F:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x\in[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f care se anulează în a.

g) A doua formulă de schimbare de variabilă:

Dacă $[a\ ,\ b]\xrightarrow{\varphi}[c\ ,\ d]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ sînt două funcţii cu proprietăţile: f este continuă pe [a,b], φ este bijectivă, φ şi φ^{-1} derivabile cu derivate continue, atunci $\int_a^b f(\varphi(t))\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,(\varphi^{-1})'(x)\,dx$.

Aplicaţii practice ale integralei

a) Aria figurilor plane

Dacă $f:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă, atunci mulţimea $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$ numită subgraficul lui f are arie egală cu Aria $\Gamma_f=\int_a^b f(x)\,dx$. Dacă $f(x)\le g(x)\quad\forall x\in[a\ ,\ b]$ atunci mulţimea $\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\}$ are aria dată de *Aria* $\Gamma_{f,g}=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx$.

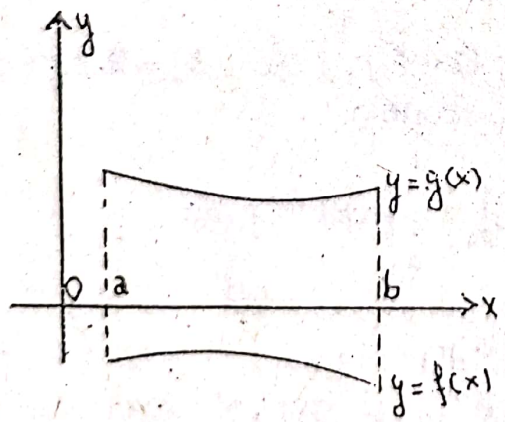


Fig. 119.

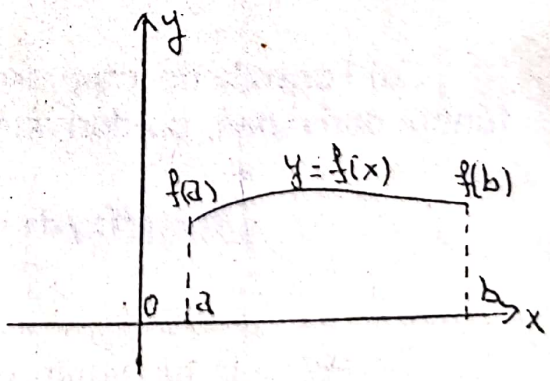


Fig. 120.

Scanned with OKEN Scanner

b) Volumul corpurilor de rotaţie.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă, atunci corpul de rotaţie $C_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \sqrt{y^2+z^2}\le f(x), a\le x\le b\}$ are volumul dat de

$$Vol\ C_f=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

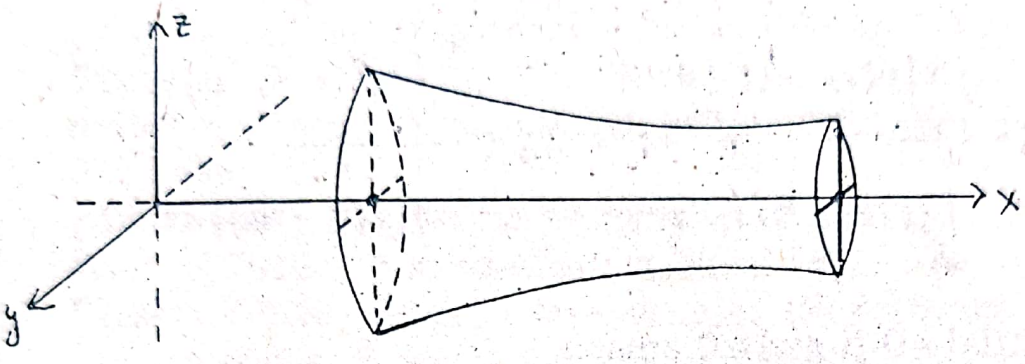


Fig. 121.

c) Lungimea graficului

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ este derivabilă cu derivată continuă atunci

$$L_f=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

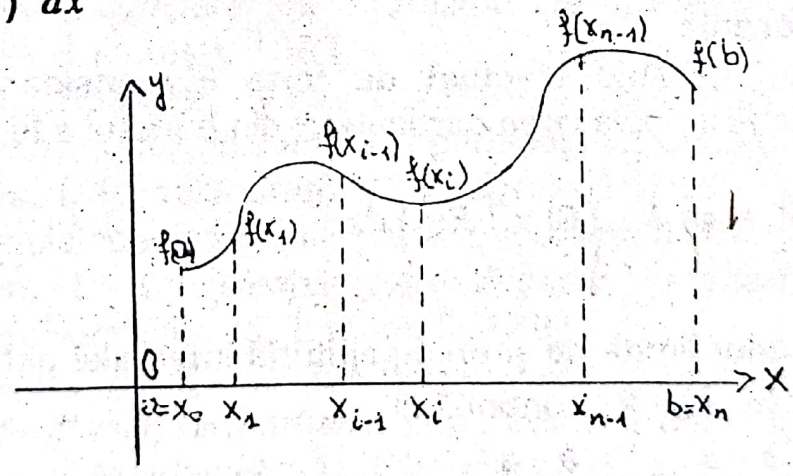


Fig. 122.

d) Aria suprafeţelor de rotaţie

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ este derivabilă cu derivată continuă aria suprafeţei $S_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \sqrt{y^2+z^2}=f(x), \forall x\in[a,b]\}$ este dată de

Scanned with OKEN Scanner

Aria $S_f = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

e) Centre de greutate

Dacă avem o placă plană de forma $\Gamma_{f,g}$ de unde $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sînt funcţii continue, atunci centrul de greutate G are coordonatele:

$$x_G = \frac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]\,dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx}; \qquad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x)-f^2(x)]\,dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx}$$

Dacă f(x) = 0 şi g(x) ≥ 0 atunci:

$$x_G = \frac{\int_a^b x g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}; \qquad y_G = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b g^2(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

f) Lucrul mecanic

Lucrul mecanic efectuat de forţa F (considerată ca funcţie continuă) pentru deplasarea particulei P din punctul a în punctul b unde $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ este $L_{a,b}(F) = \int_a^b F(x)\,dx$

g) Calculul unor limite de şiruri cu ajutorul integralei definite.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă şi

$\Delta_n = (a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, \ldots, a+n\frac{b-a}{n})$ o diviziune; dacă

$\sigma_{\Delta_n}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ este suma Riemann ataşată funcţiei f

rezultă $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă, Lia, Morozan, T., *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, vol.I, Editura tehnică, București, 1978.
2. Bachmann (și colaboratorii), *Mică enciclopedie matematică* (traducere din limba germană), Editura tehnică, București, 1980.
3. Bătineţu, M.D., Maftei, V.I., Stancu-Minasian, M.I., *Exerciţii şi probleme de analiză matematică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.
4. Bătineţu, M.D., *Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu*, „ȘIRURI", Editura Albatros, București, 1979.
5. Bârseti, Aurel, *Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathématique*, Édition didactique et pédagogique, Bucarest.
6. Bobancu, V. (și colaboratorii), *Dicționar de matematici generale*, Editura enciclopedică română, București, 1974.
7. Brânzei, D., Precupanu, T., Papaghiuc, N., Gheorghiu, N., Radu, Gh., *Matematici elementare*, Editura Junimea, Iași, 1983.
8. Bușneag, D., Maftei, I., *Teme pentru cercurile și concursurile de matematică ale elevilor*, Scrisul românesc, Craiova, 1983.
9. Cocuz, M., *Culegere de probleme de matematică*, Editura Academiei, București, 1984.
10. Craiu, M., Roșculeț, N.M., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1976.
11. Cuculescu, I. (și colaboratorii), *Culegere de probleme rezolvate*, Editura enciclopedică și științifică, București, 1984.
12. Cuculescu, I., *Olimpiadele internaționale de matematică ale elevilor*, Editura tehnică, București, 1984.
13. Démidovitch, B. (și colaboratorii), *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique*, Editions Mir, 1974.
14. Drăgănescu, M., Iacob, C., *Matematica în lumea de azi și de mîine*, Editura Academiei, București, 1985.
15. Filipescu, D., Grecu, E., Medinţu, R., *Matematici generale*, vol.I, II, Editura didactică și pedagogică, București, 1975.
16. „Gazeta matematică", 1895-1992.
17. Gârbou, D., Gârbou, E., *Bacalaureat*, Editura Litera, București, 1986.
18. Georgescu-Buzău, E., Matei, N., *Relații, Funcții, Structuri algebrice*, Editura didactică și pedagogică, București, 1973.

Scanned with OKEN Scanner

19. Georgescu-Buzău, E., Onofraș, E., *Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu*, Editura didactică și pedagogică, București, 1983.
20. Georgescu-Buzău, E., Matei, N., *Exerciții de teoria mulțimilor*, Editura didactică și pedagogică, București, 1969.
21. Giurgiu, I., Turtoiu, F., *Culegere de probleme de matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1981.
22. Gussi, Gh., Stănășilă, O., Stoica, T., *Elemente de analiză matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura didactică și pedagogică, București, 1984.
23. Iaglom, A. M., Iaglom, I. M., *Probleme neelementare tratate elementar*, Editura tehnică, București, 1983.
24. Ionescu-Țiu, C., Pîrșan, L., *Calcul diferențial și integral pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, București, 1975.
25. Kvant, *Probleme de matematică* (traduse din limba rusă), Editura didactică și pedagogică, București, 1983.
26. Konnerth, Oliver, *Greșeli tipice în învățarea analizei matematice*, Editura Dacia, Cluj, 1982.
27. Leonte, A., Trandafir, R., *Principii și structuri fundamentale în matematica de liceu*, vol.II, Editura Albatros, București, 1986.
28. Leonte, A., Niculescu, P.C., *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică*, Scrisul românesc, Craiova, 1981.
29. Lunț, G. E. (și colaboratorii), *Îndrumător matematic și tehnic*, Editura tehnică, București, 1964.
30. Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S., *Analiză matematică*, vol.I, Editura didactică și pedagogică, București, 1966.
31. Nicolescu, P.C., *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, București, 1984.
32. Pîrșan, L., Ionescu-Țiu, C., *Probleme de matematică*, Editura Facla, Timișoara, 1979.
33. Popa, C., Hiriș, V., Megan, M., *Introducere în analiza matematică*, Editura Facla, Timișoara, 1976.
34. Radu, Gh., *Elements de logique Mathématique* - première partie. Curs litografiat, Universitatea Kinshasa, Zair, 1975.
35. Rizescu, Gh., Rizescu, E., *Teme pentru cercurile de matematică din licee*, Editura didactică și pedagogică, București, 1977.
36. Rogai, E., *Tabele și formule matematice*, Editura tehnică, București, 1983.
37. Roșculeț, M., *Analiză matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1984.

Scanned with OKEN Scanner

38. Sireţchi, GH., *Calcul diferenţial şi integral*, vol.I, II, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1985.
39. Stoka, M., Raianu, M., Mărgăritescu, E., *Culegere de probleme de trigonometrie*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975.
40. Teodorescu, N. (şi colaboratorii), *Probleme din Gazeta Matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.
41. Trandafir, R., Leonte, A., *Principii şi structuri fundamentale în matematica de liceu. Algebră şi analiză matematică*, Editura Albatros, Bucureşti, 1982.
42. Turtoiu, F., *Probleme de trigonometrie*, Editura tehnică, Bucureşti, 1986.
43. Udrişte, N. C., Bucur, M. C., *Probleme de matematici şi observaţii metodologice*, Editura Facla, Timişoara, 1980.
44. Udrişte, C., Tănăsescu, E., *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de variabile reale*, Editura tehnică, Bucureşti, 1980.
45. Vodă, Gh. V., *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, Bucureşti, 1981.

Scanned with OKEN Scanner

Redactor : CONSTANTIN DRAM
Tehnoredactare și culegere computerizată : A92 SRL

Bun de tipar 24.11.93. Formatul 60x84 1/16. Imprimare ofset.
Coli de tipar 28,83. Impr. crom.-conv. 29,17. Coli editoriale 17,36. Tirajul 10000.
Comanda Nr. 224/31294.

Editura „JUNIMEA", bd. Copou nr. 3-5.
IAȘI—ROMÂNIA
Editura „Universitas".
Chișinău, bd. Ștefan cel Mare, 180.
Combinatul poligrafic
277004 Chișinău, str. Mitropolitul P. Movilă, 35.

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea de față conține 1001 probleme de analiză matematică sau adiacente înțelegerii acestor noțiuni. Ea se adresează elevilor de liceu, celor care se pregătesc pentru examenul de bacalaureat sau admitere în facultate, profesorilor de matematică în munca lor la catedră, perfecționării și altor categorii de cititori interesați.

ISBN 973-37-0180-7

Scanned with OKEN Scanner